ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ

9-11 КЛАССЫ

ДОНЕЦК 2019

Список обозначений

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел

$\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел

$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел

$a \in A$ – элемент a принадлежит множеству A

$A \subset B$ – A является подмножеством множества B

$X \times Y$ – множество пар чисел (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$

X^2 – множество пар чисел (x, y), где $x, y \in X$

$|x|$ – модуль числа x

$[x]$ – целая часть числа x

$\{x\}$ – дробная часть числа x

$a \equiv b \pmod 2$ – числа a и b дают одинаковые остатки при делении на 2

$\{a_k\}_{k=1}^{n}$ – конечная последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ – бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots$

Задача № 1. Функции, нечётные относительно множества

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и c – точка из интервала $(a; b)$. Будем говорить, что функция f *нечётна относительно точки* c, если $f(c - x) = -f(c + x)$ для всех x, для которых левая и правая части этого равенства определены. Также будем говорить, что функция f *нечётна относительно множества* $E \subset (a; b)$, если она нечётна относительно каждой точки из E.

1. Пусть $[a; b] = [0; 1]$. Привести пример функции, нечётной относительно множества E, в следующих случаях:
   (a) $E = \{1/2\}$;
   (b) $E = \{1/3\}$;
   (c) $E = \{c\}$, где $c \in (0; 1)$.
2. Описать все двухточечные множества E, для которых существует функция, нечётная относительная множества E.
3. (a) Привести пример функции, нечётной относительно некоторого трёхточечного множества E.
   (b) Описать все трёхточечные множества E, для которых существует функция, нечётная относительная множества E.
4. Получить необходимые и/или достаточные условия для множества E, при которых существует функция, нечётная относительно множества E с числом точек, большим двух.
5. Существует ли функция, нечётная относительно некоторого бесконечного множества E?
6. Что будет в любой из предыдущих ситуаций, если убрать требование непрерывности функции f в определении функции, нечётной относительно точки?
7. Предложите собственные направления исследования этой задачи и изучите их.

Задача № 2. Надувательство

Петя и Коля играют в следующую игру – Петя указывает количество видов выпуклых многоугольников (например, 3 пятиугольника, 4 шестиугольника и 7 восьмиугольников), которые Коля должен вырезать из резины (Коля сам выбирает конкретные параметры каждого многоугольника), а затем склеить их между собой так, что получится некий объёмный многогранник, надув который можно получить своеобразный мяч. При этом каждый заявленный Петей многоугольник должен являться гранью данного многогранника, а из каждой его вершины должно выходить ровно 3 ребра (т.е. в каждой вершине сходится 3 многоугольника). Коля выигрывает, если ему удается построить соответствующий многогранник, в противном случае выигрывает Петя.

Сперва игра шла очень медленно, но затем Коля вспомнил теорему выдающегося математика Леонарда Эйлера[1]:

Пусть B *– число вершин выпуклого многогранника,* P *– число его рёбер и* Γ *число граней, тогда справедливо соотношение* $B - P + \Gamma = 2$.

1. Проверьте теорему Эйлера для всех платоновских тел (тетраэдра, гексаэдра, октаэдра, додекаэдра, икосаэдра).

2. Петя указал следующий набор многоугольников: 10 пятиугольников и 12 шестиугольников. Помогите Коле определить, сможет ли он сделать из данного набора выпуклый многогранник.

3. Петя указал n пятиугольников и m шестиугольников. Выясните, при каких значениях n и m Коле удастся выиграть.

4. Петя указал наборы из n многоугольников только одного вида (только треугольники, только четырёугольники и т.д.). Выясните, в каких случаях и при каких n Коле удастся выиграть.

   В соотношении из приведенной выше теоремы Эйлера число в правой части равенства называется *эйлеровой характеристикой.* Так, например, если многогранник можно «надуть» до формы шара, то его эйлерова характеристика равна 2, или, вернее сказать, эйлерова характеристика шара равна 2.

5. Допустим теперь, что условия игры изменили так, что построенный многогранник Коля должен надувать до формы тора («бублика»). Вычислите Эйлерову характеристику тора.

6. Повторите пункты 2-4 для случая тора.

7. Предложите собственные направления исследования этой задачи и изучите их.

[1] Леонард Эйлер – швейцарский, немецкий и российский математик и механик. Почти полжизни провёл в России, где внёс существенный вклад в становление российской науки.

Задача № 3. Геометрия шахматного коня

Пусть X – некоторое множество. Функция $\varrho : X \times X \to \mathbb{R}$, определенная на всех парах (x, y) элементов множества X, называется *метрикой* (или *расстоянием*) в X, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $\varrho(x, y) = 0$, если и только если $x = y$ (аксиома тождества);

2) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ для всех x, $y \in X$ (аксиома симметрии);

3) $\varrho(x, y) \leqslant \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$ для всех x, y, $z \in X$ (аксиома треугольника).

Множество X вместе с фиксированной в нём метрикой называется *метрическим пространством.*

Понятие метрики и метрического пространства являются одними из наиболее важных понятий современной математики.

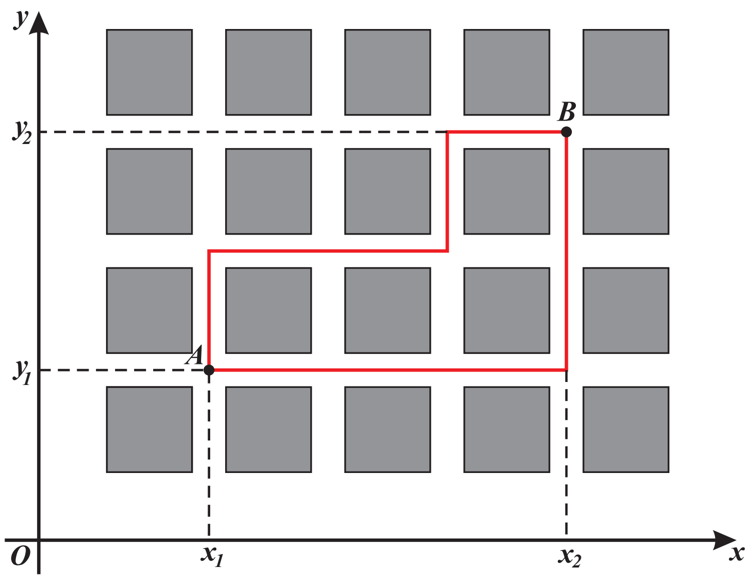
Рассмотрим частный случай, когда $X = \mathbb{R}^2$, т. е. X – координатная плоскость. Обычное расстояние ϱ на координатной плоскости между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ определяется формулой

$$\varrho(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1}$$

Например, расстояние между точками $A(0; 0)$ и $B(3; 4)$ в метрике, определённой формулой (1), равняется $\varrho(A, B) = 5$.

В некоторых случаях более естественным оказывается другое определение расстояния. Например, в городе с перпендикулярными улицами, показанными на рисунке, расстоянием между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ естественней считать длину пути из A в B не по прямой, а по улицам. В этом случае расстояние определяется формулой

$$\varrho(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|. \tag{2}$$



Например, расстояние между точками $A(0; 0)$ и $B(3; 4)$ в метрике, определённой формулой (2), равняется $\varrho(A, B) = 7$.

1. (a) Покажите, что из трёх аксиом метрики следует её неотрицательность, т. е. $\varrho(x, y) \geqslant 0$ для всех x, $y \in X$.

   (b) Можно ли из аксиомы тождества и аксиомы треугольника вывести аксиому симметрии?

2. (a) Является ли функция $\varrho(m, n) = \frac{|m-n|}{mn}$ метрикой на множестве $\mathbb{N}$?

   (b) Какие из указанных функций являются метриками на множестве $\mathbb{R}$?

      i. $\varrho(x, y) = \cos^2(x - y)$

      ii. $\varrho(x, y) = |x^3 - y^3|$

      iii. $\varrho(x, y) = |\sin x - \sin y|$

      iv. $\varrho(x, y) = |2^x - 2^y|$

   (c) Пусть X – множество всех точек окружности радиуса R с центром в начале координат. Примем за расстояние между двумя его точками длину кратчайшей дуги окружности, их соединяющей. Является ли X метрическим пространством?

3. (a) Докажите, что для любых четырёх точек A, B, C, D метрического пространства выполнено неравенство

   $$\varrho(A, C) + \varrho(B, D) \leqslant \varrho(A, B) + \varrho(B, C) + \varrho(C, D) + \varrho(D, A).$$

   (b) Докажите, что для любых n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n \geqslant 3$) метрического пространства выполнено неравенство

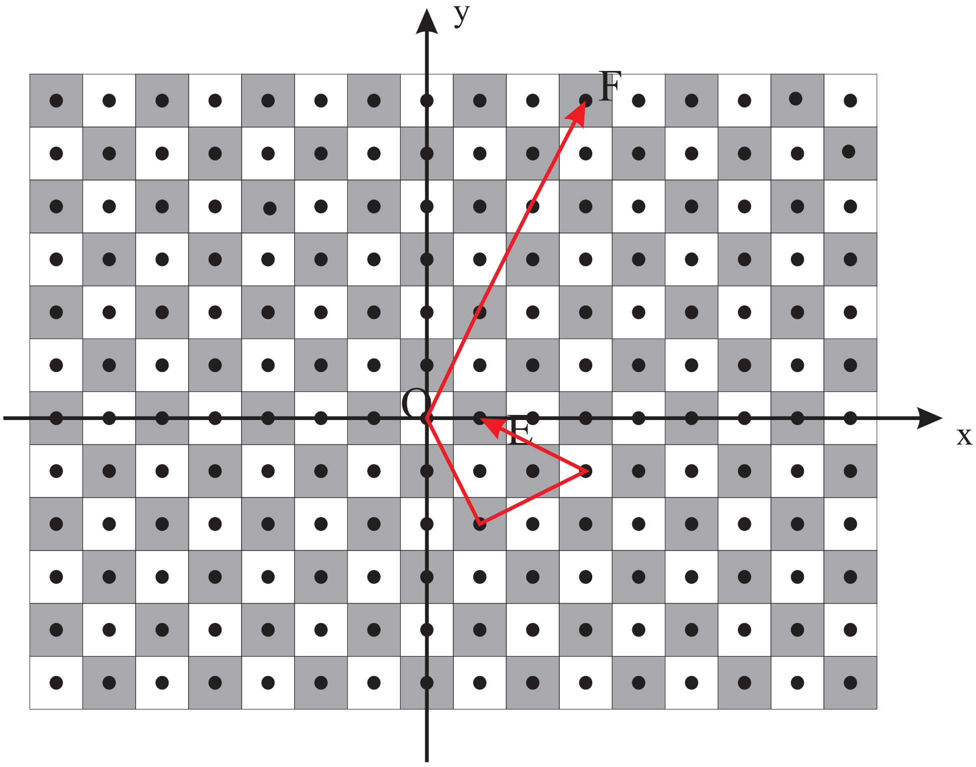
   $$\varrho(A_1, A_2) + \varrho(A_2, A_3) + \ldots \varrho(A_{n-1}, A_n) \geqslant \varrho(A_1, A_n).$$

   (c) На плоскости заданы пять точек A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Известно, что расстояние между точками A_1 и A_2 равно 30, между A_2 и A_3 – 80, между A_3 и A_4 – 236, между A_4 и A_5 – 86, между A_5 и A_1 – 40. Найдите расстояние между точками A_3 и A_5.

4. Далее нас будут интересовать ходы коня на шахматной доске, которую мы будем предполагать бесконечной. Обозначим клетки шахматной доски парами целых чисел (координатами центра клетки). *Ход коня*, находящегося в начале координат $(0; 0)$, – это переход в одну из 8 клеток с координатами $(\pm 1; \pm 2)$, $(\pm 2; \pm 1)$. Если же конь находится в клетке $(m; n)$, то один ход переводит его в одну из клеток $(m \pm 1; n \pm 2)$, $(m \pm 2; n \pm 1)$.

   Определим *расстояние* от клетки P до клетки Q как м и н и м а л ь н о е число ходов коня, необходимое для того, чтобы перейти из P в Q. Обозначим это число через $\varrho(P, Q)$. Например, расстояние от клетки $O(0; 0)$ до клеток $E(1; 0)$ и $F(3; 6)$ одинаково и равно 3.

   Это расстояние – *метрика коня* – порождает весьма необычную *геометрию*. В ней можно определить понятие *отрезка* AB как множество



клеток M таких, что $\varrho(A, M) + \varrho(M, B) = \varrho(A, B)$, но отрезки получаются весьма уродливыми (два отрезка могут пересекаться в нескольких клетках). Можно определить и *окружности* радиуса r.

(a) Докажите, что введённое расстояние является метрикой.

(b) Выведите формулу расстояния $\varrho(O, P)$ от клетки $O(0; 0)$ до клетки $P(m; n)$.

(c) Изобразите какой-либо отрезок в метрике шахматного коня и найдите его длину.

(d) Изобразите какую-либо окружность в метрике шахматного коня.

(e) Найдите площадь круга с центром в клетке $O(0; 0)$ радиуса r, то есть число клеток $P(m; n)$, для которых $\varrho(O, P) \leqslant r$.

5. Предложите собственные направления исследования этой задачи и изучите их.

Задача № 4. Чудесная пекарня

Птица Додо решила открыть пекарню в Стране чудес. Шляпник сделал множество всевозможных форм (выпуклых плоских фигур) для выпечки хлеба. В Стране чудес хлеба считаются *равными*, если у них одинаковы диаметры. *Диаметром* ограниченной фигуры, содержащей в себе свою границу, называется максимальное расстояние между парой точек данной фигуры. В рамках данного исследования рассматривается вопрос разделения форм для выпечки Шляпника на равные хлеба исходному (формовому) хлебу.

1. Покажите, что диаметр многоугольника равен наибольшему из расстояний между его вершинами.

2. Докажите, что всякая плоская фигура диаметра d может быть заключена в правильный шестиугольник, у которого расстояние между параллельными сторонами равно d.

3. Опираясь на предыдущий пункт, докажите, что любой хлеб диаметра d можно разбить на три равных хлеба, диаметр каждого из которых не превосходит $\frac{\sqrt{3}}{2}d$.

   Прямая l, обладающая свойством, что она имеет хотя бы одну общую точку с фигурой G и фигура G расположена по одну сторону от неё, называется *опорной прямой.*

   Пусть G – ограниченная выпуклая фигура и l – некоторая прямая, тогда расстояние h между двумя опорными прямыми, перпендикулярными прямой l, называется *шириной фигуры G в направлении l*. Если ширина фигуры G инвариантна относительно направления опорных прямых, то такую фигуру называют *фигурой постоянной ширины.*

4. В правильном многоугольнике с нечётным числом сторон проведены дуги окружностей, каждая из которых соединяет концы стороны и имеет центр в противолежащей вершине (обобщение треугольника Рело). Докажите, что эти дуги ограничивают фигуру постоянной ширины.

5. Докажите, что хлеб в виде правильного многоугольника с нечётным числом сторон, у которого наибольшая диагональ имеет длину d, не может быть разбит на две части, каждая из которых является меньшим хлебом (имеет диаметр меньше d).

6. Докажите, что хлеб в виде вписанного многоугольника с чётным числом сторон может быть разбит на два меньших хлеба. Верно ли это, если форма исходного хлеба является произвольным многоугольником с чётным числом сторон?

7. Предложите собственные направления исследования этой задачи и изучите их.

Рекомендованная литература

1. Б. Грюнбаум. Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. – М.: Наука, 1971.

2. В.Г. Болтянский, П.С. Солтан. Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств – Кишинев: «Штиинца», 1978.

Задача № 5. Реальный спектр

Целой частью числа $x \in \mathbb{R}$ называется число $c \in \mathbb{Z}$ такое, что $c \leqslant x < c+1$, т. е. наибольшее целое число не превосходящее x. Целая часть числа x обозначается символом $[x]$. Например, $[3/2] = 1$, $[\pi] = 3$, $[-1/2] = -1$. *Дробной частью* числа $x \in \mathbb{R}$ называется величина $\{x\} := x - [x]$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда последовательность

$$[\alpha], [2\alpha], \ldots, [n\alpha], \ldots$$

будем называть *спектром* числа α. Например, если $\alpha = 1/2$, то

$$[n\alpha] = \frac{n}{2} - \frac{(-1)^{n+1} + 1}{4}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. (a) Найдите спектры чисел $\alpha = -1/2$ и $\alpha = p/2$, $p \in \mathbb{N}$.
   (b) Найдите спектры чисел $\alpha = 1/3$ и $\alpha = p/3$, $p \in \mathbb{N}$.
   (c) Найдите первые 10 членов спектра числа $\alpha = \sqrt{2}$.
   (d) Как связаны спектр числа α со спектрами следующих чисел: $-\alpha$, $\{\alpha\}$, $m + \alpha$, где $m \in \mathbb{Z}$.
   (e) Найдите формулу для восстановления числа α по его спектру.

2. Пусть $X \subset \mathbb{N}$ и для чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполняется равенство:

$$[n\alpha] = [n\beta] \text{ для всех } n \in X. \tag{1}$$

   (a) Если $X = \mathbb{N}$, то равенство (1) означает совпадение спектров чисел α и β. Что можно сказать о числах α и β в этом случае?
   (b) Опишите все подмножества $X \subset \mathbb{N}$, для которых из выполнения равенства (1) вытекает равенство $\alpha = \beta$.
   (c) Пусть $\alpha, \beta \in (0, 1)$ и выполняется равенство

$$[n\alpha] \equiv [n\beta] \pmod 2 \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

   Что можно сказать о числах α и β?

3. (a) Верно ли, что для любой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ найдётся такое число $\alpha \in \mathbb{R}$, что $x_n = [n\alpha]$, $n \in \mathbb{N}$?
   (b) Найдите какое-нибудь необходимое условие того, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ является спектром некоторого числа $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (c) Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Найдите критерий, т. е. необходимое и достаточное условие того, что $\{[n\alpha]\}_{n=1}^{\infty}$ спектр рационального числа $\alpha \in \mathbb{Q}$.

4. Пусть f – неотрицательная на полуоси $[0, +\infty)$ функция. Предложите геометрическую интерпретацию суммы $\sum\limits_{k=1}^{n}[f(k)]$.

   Найдите сумму $\sum\limits_{k=1}^{n}[k\alpha]$ для чисел:

   (a) $\alpha = 1/2$ и $\alpha = p/2$, $p \in \mathbb{N}$;

   (b) $\alpha = 1/3$, $\alpha = p/3$, $p \in \mathbb{N}$.

5. Пусть ABC – треугольник с вершинами в точках $A(a_x, a_y)$, $B(b_x, b_y)$, $C(c_x, c_y)$. Точка $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ называется *целой*, если $x, y \in \mathbb{Z}$. В пунктах ниже требуется найти количество целых точек, лежащих внутри треугольника ABC.

   (a) $A(0, 0)$, $B(x, \frac{5x}{2})$, $C(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$;

   (b) $A(0, 0)$, $B(x, \frac{7x}{2})$, $C(x, -\frac{3x}{2})$, $x \in \mathbb{R}$.

6. Предложите собственные направления исследования этой задачи и изучите их.