ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ

9-11 КЛАССЫ

ДОНЕЦК 2020

Список обозначений

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел

$\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел

$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел

$i = \overline{1, n}$ – i принимает все натуральные значения от 1 до n

$a \in A$ – элемент a принадлежит множеству A

$A \subset B$ – A является подмножеством множества B

$|A|$ – количество элементов конечного множества A

$A \times B$ – множество упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$

A^2 – множество упорядоченных пар (a, b), где $a, b \in A$

Задача № 1. Магические квадраты

Классическим магическим квадратом порядка n, где n – некоторое натуральное число, называют таблицу размера $n \times n$, заполненную натуральными числами от 1 до n^2 так, что их суммы в каждой строке, столбце, а также по главной и побочной диагоналям равны некоторому числу $\sum(n)$. Число $\sum(n)$ называют *магическим числом.*

Первые упоминания о магических квадратах относят еще к 2200 г. до н.э., когда, согласно преданию, на берег реки Ло в Китае вынесло черепаху, на панцире которой был вырезан магический квадрат порядка 3, известный сейчас как квадрат Ло-Шу.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

В рамках данного исследования рассматриваются вопросы, связанные с математической теорией магических квадратов.

1. Установите значение магического числа:
   (a) $\sum(3)$;
   (b) $\sum(4)$;
   (c) $\sum(n)$.

2. Докажите, что в центральной ячейке магического квадрата порядка 3 (в ячейке, находящейся на пересечении второй строки и второго столбца) обязательно находится число 5.

3. Количество различных магических квадратов порядка n будем обозначать $T(n)$. Не взирая на столь ранее начало изучения математической теории магических квадратов и по сей день сведения о точном значении величины $T(n)$ имеются лишь для $n = 2, 3, 4, 5$. Так, например, $T(4) = 7040$ и $T(5) = 2202441792$.
   (a) Найдите значение $T(2)$;
   (b) Найдите значение $T(3)$;
   (c) Рассмотрите совокупность всех возможных магических квадратов порядка 3, а затем докажите, что $T(n)$ делится на 8.

4. Рассмотрим магический квадрат порядка 4

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

   где a_{ij} $(i, j = \overline{1, 4})$ – различные числа из ряда от 1 до 16.

Докажите справедливость следующих соотношений:

(a) $a_{11} + a_{14} + a_{41} + a_{44} = \sum(4)$;

(b) $a_{22} + a_{23} + a_{32} + a_{33} = \sum(4)$;

(c) $a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = a_{33} + a_{34} + a_{43} + a_{44}$;

(d) Найдите другие закономерности расположения чисел в магическом квадрате 4-го порядка;

(e) Поменяем местами вторую и третью строки в магическом квадрате

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

Будет ли квадрат, полученный таким образом, также магическим? Обоснуйте свой ответ.

(f) Поменяем местами второй и третий столбец в магическом квадрате

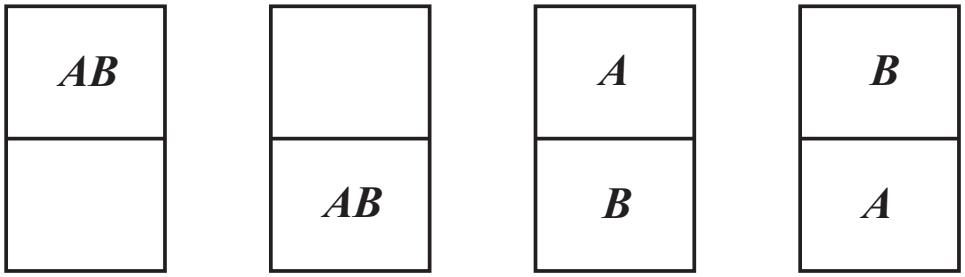
a_{11}	a_{13}	a_{12}	a_{14}
a_{21}	a_{23}	a_{22}	a_{24}
a_{31}	a_{33}	a_{32}	a_{34}
a_{41}	a_{43}	a_{42}	a_{44}

Будет ли квадрат, полученный таким образом, также магическим? Обоснуйте свой ответ.

5. Предложите собственные направления исследования этой задачи и изучите их.

Задача № 2. Великий комбинатор

1. Два человека (A и B) могут поселиться в двух разных комнатах четырьмя различными способами:



   Сколькими различными способами можно поселить:

   (a) двух человек в трёх разных комнатах;

   (b) трёх человек в двух разных комнатах;

   (c) трёх человек в двух разных комнатах так, чтобы ни одна из комнат не осталась пустой;

   (d) n человек в m разных комнатах, где $n, m \in \mathbb{N}$;

   (e) n человек в m разных комнатах так, чтобы ни одна из комнат не осталась пустой, где $n, m \in \mathbb{N}$?

2. На плоскости отмечены n синих и m красных точек, причём так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует:

   (a) отрезков, у которых один конец синий, а другой – красный;

   (b) отрезков с концами одинакового цвета;

   (c) треугольников с вершинами одинакового цвета;

   (d) треугольников, у которых не все вершины одинакового цвета?

3. Проведены две параллельные прямые. На одной прямой отмечено n разных точек, а на другой – m. Сколько существует различных треугольников с вершинами в отмеченных точках, если

   (a) $n = 4$, $m = 5$;

   (b) n и m – произвольные натуральные числа?

4. (a) На окружности отмечены 10 точек. Сколько существует различных:

      i. треугольников;

      ii. выпуклых многоугольников с вершинами в отмеченных точках?

   (b) На окружности отмечены 10 синих точек и одна красная. Рассмотрим всевозможные выпуклые многоугольники с вершинами в этих точках. Каких многоугольников больше и на сколько: тех, у которых есть красная вершина, или тех, у которых её нет?

(c) На окружности отмечены 10 точек. Сколько различных троек хорд можно провести с вершинами в этих точках так, чтобы у них не было общих концов (хорды могут пересекаться)?

(d) На окружности отмечены 10 точек. Сколько можно построить различных трёхзвенных незамкнутых ломаных линий с вершинами в заданных точках (звенья могут пересекаться)?

5. Предложите собственные направления исследования этой задачи и изучите их.

Задача № 3. Опасные фигуры

В данной задаче нас будет интересовать количество целых точек, т. е. точек с целочисленными координатами, которые содержаться в некотором множестве на плоскости. Далее символами $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{Z}^2$ будем обозначать плоскость и множество точек с целочисленными координатами на ней, соответственно.

Пусть $P \subset \mathbb{R}^2$ – некоторое множество на плоскости. Обозначим через $N(P)$ – количество целых точек, содержащихся в P, т. е. $N(P) = |P \cap \mathbb{Z}^2|$.

Рассмотрим следующие преобразования множеств на плоскости:

Сдвиг. Пусть P – некоторое множеств на плоскости и $t = (t_1, t_2)$ – вектор. Тогда множество $P + t$ определяется, как

$$P + t = \{(x + t_1, y + t_2), \text{ где } (x, y) \in P\},$$

т. е. каждая точка множества P сдвигается на вектор t.

Растяжение относительно начала координат. Пусть P – некоторое множество на плоскости и $\lambda > 0$. Тогда множество λP определяется, как

$$\lambda P = \{(\lambda x, \lambda y), \text{ где } (x, y) \in P\},$$

т. е. координаты каждой точки множества P умножаются на λ.

Например, если P – треугольник ABC с вершинами $A(0, 0)$, $B(0, 2)$ и $C(2, 0)$, то $N(P) = 6$ (Рис. 1, а). Если $t = (1, 1)$, то $N(P + t) = 6$ (Рис. 1, б). Если $\lambda = 2$, то $N(\lambda P) = 15$ (Рис. 1, в).

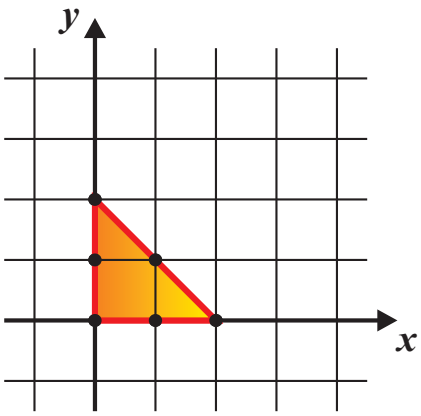


Рис. 1, а

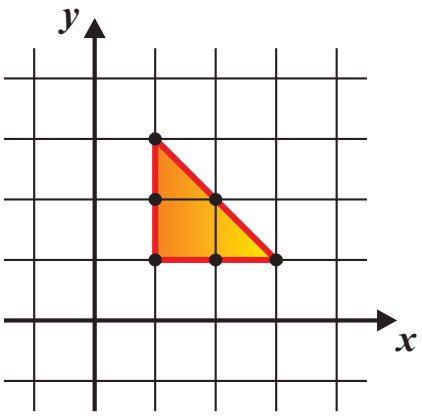


Рис. 1, б

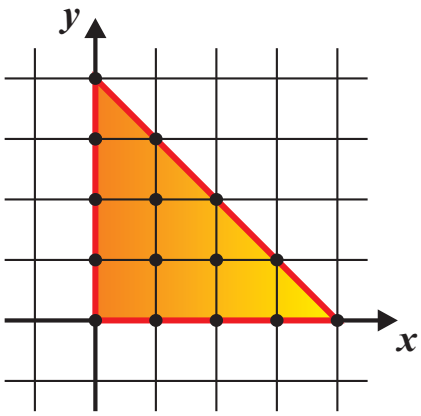


Рис. 1, в

1. Пусть P – некоторое множество на плоскости и t – вектор с целочисленными координатами. Как связаны между собой величины $N(P)$ и $N(P + t)$? Обоснуйте свой ответ.

2. Пусть L_1 – отрезок, концы которого заданы координатами $(0, 0)$ и $(2, 2)$, а L_2 – отрезок с концами $(0, 0)$ и $(2, 3)$.

   (a) Найдите $N(L_1)$ и $N(L_2)$.

   (b) Найдите $N(nL_1)$ и $N(nL_2)$, где $n \in \mathbb{N}$.

3. Пусть L – отрезок на плоскости, концы которого имеют целочисленные координаты, и n – произвольное натуральное число.

   (a) Докажите, что величина $N(nL)$, является многочленом первой степени от n с целыми коэффициентами, т. е. $N(nL) = an + b$, при некоторых $a, b \in \mathbb{Z}$. Чему равно число b?

   (b) Сколько целых точек содержит отрезок L с концами $(-1, 2)$ и $(98, 35)$?

4. В следующих подпунктах для заданного множества P, которое состоит из объединения отрезков с целыми вершинами, требуется доказать, что величина $N(nP)$, $n \in \mathbb{N}$, имеет вид $an + b$ при некоторых $a, b \in \mathbb{Z}$, и указать чему равно число b.

   (a) P – произвольная ломаная, начало и конец которой не совпадают (Рис. 2, а).

   (b) P – произвольная ломанная, начало и конец которой совпадают (Рис. 2, б).

   (c) P – три отрезка, выходящие из одной точки (Рис. 2, в).

   (d) P – граница прямоугольника с одной из его диагоналей (Рис. 2, г).

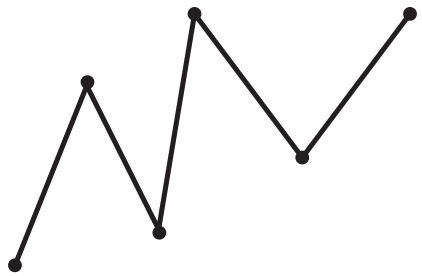


Рис. 2, а

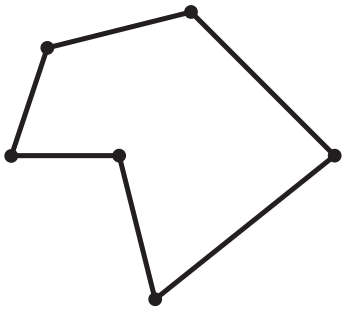


Рис. 2, б

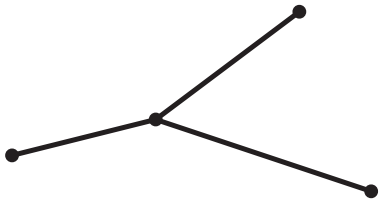


Рис. 2, в

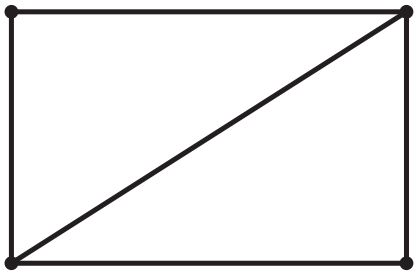


Рис. 2, г

5. Описать все пары чисел $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, для которых существует множество P, состоящее из объединения отрезков с целыми вершинами, для которого $N(nP) = an + b$, $n \in \mathbb{N}$.

6. (a) Пусть P – квадрат с вершинами $A(1,1)$, $B(1,4)$, $C(4,4)$, $D(4,1)$ (Рис. 3, а). Найдите $N(P)$ и $N(nP)$, где $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Пусть P – треугольник с вершинами $A(-2,0)$, $B(0,0)$, $C(0,-2)$ (Рис. 3, б). Найдите $N(P)$ и $N(nP)$, где $n \in \mathbb{N}$.

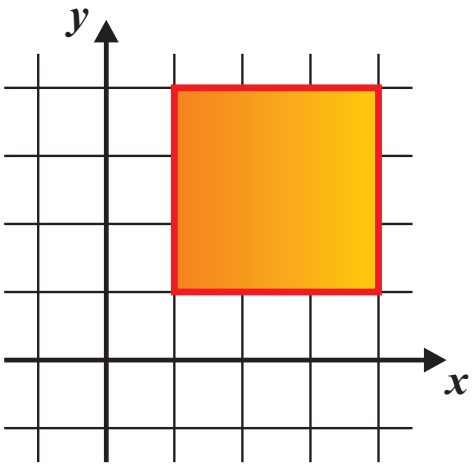


Рис. 3, а

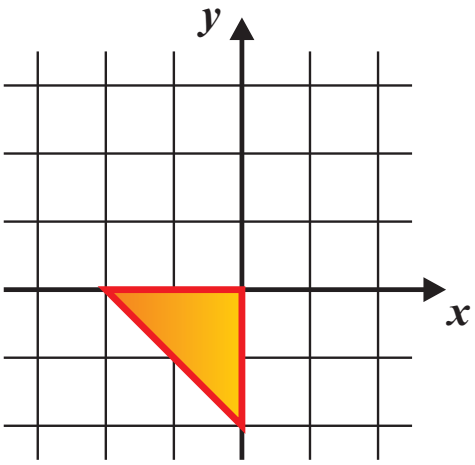


Рис. 3, б

7. В следующих подпунктах для заданного многоугольника P с целочисленными вершинами требуется доказать, что величина $N(nP)$, $n \in \mathbb{N}$, имеет вид $an^2 + bn + c$, где $a, b, c \in \mathbb{Q}$, и указать чему равны числа a и c.

   (a) P – прямоугольник со сторонами параллельными координатным осям;

   (b) P – прямоугольный треугольник с катетами параллельными координатным осям;

   (c) P – произвольный треугольник.

8. Пусть P – выпуклый многоугольник с целочисленными вершинами. Докажите, что $N(nP) = an^2 + bn + 1$, $n \in \mathbb{N}$, при некоторых $a, b \in \mathbb{Q}$.

9. Предложите собственные направления исследования этой задачи и изучите их.