Л.П. Вовк

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ТЕОРИЯ, МЕТОДЫ, АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ

Учебное пособие

УЧРЕЖДЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКАЯ РЕСПУБЛИКАНСКАЯ МАЛАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УЧАЩЕЙСЯ МОЛОДЕЖИ»

ПОЗНАНИЕ И ТВОРЧЕСТВО!

Донецкая Республиканская Малая Академия Наук учащейся молодёжи
2020

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
УЧРЕЖДЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКАЯ РЕСПУБЛИКАНСКАЯ МАЛАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УЧАЩЕЙСЯ МОЛОДЕЖИ»

УЧРЕЖДЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКАЯ РЕСПУБЛИКАНСКАЯ МАЛАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УЧАЩЕЙСЯ МОЛОДЕЖИ»

ПОЗНАНИЕ И ТВОРЧЕСТВО!

Л.П. Вовк

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ТЕОРИЯ, МЕТОДЫ, АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ

Учебное пособие
для обучающихся общеобразовательных организаций и
учреждений дополнительного образования

Донецк
2020

УДК 512.6
ББК 22.14
В61

Рекомендовано Методическим советом Учреждения дополнительного образования «Донецкая Республиканская Малая Академия Наук учащейся молодежи» в качестве учебного пособия для обучающихся учреждений дополнительного образования

(Протокол №1 от 20 января 2020 года)

Рецензенты:
Чальцев Михаил Николаевич – директор АДИ ГОУ ВПО «ДонНТУ», доктор технических наук, профессор;
Ивахненко Наталья Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики ГО ВПО «ДонНУЭТ им. Михаила Туган-Барановского».

Автор:
Вовк Леонид Петрович – преподаватель секции «Математика» «ДОНМАН», доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования АДИ ГОУ ВПО «ДонНТУ».

Вовк, Л.П.
В61 Алгебраические и иррациональные уравнения. Теория, методы, алгоритмы решения: учеб. пособие для обучающихся общеобразовательных организаций и учреждений дополнительного образования / Л.П. Вовк; «ДОНМАН». - Донецк: ДОНМАН, 2020. – 154 с.

Учебное пособие рассматривает методы решения алгебраических и иррациональных уравнений – фундаментальных разделов элементарной математики, содержит краткий теоретический материал, классификацию методов решения и практические задания для самостоятельной работы. Материал распределен в соответствии с общими правилами изложения математических разделов – от простого к сложному, поэтому позволяет постепенно овладевать соответствующим разделом. Каждый тип уравнений сопровождается примерами с подробным решением.

Цель пособия – подготовка абитуриентов к сдаче ГИА, ЕГЭ и участию в олимпиадах математической тематики.

УДК 512.6
ББК 22.14

ПРЕДИСЛОВИЕ

В предлагаемой книге изложены с единых позиций практически все вопросы, относящиеся к теории алгебраических и иррациональных уравнений и способам их аналитического решения. Основное внимание уделяется алгоритмичности методов решения представленных задач, с тем чтобы можно было на практике выполнять необходимые расчеты.

Сейчас имеется довольно широкий выбор литературы, посвященной элементарной математике и вопросам сдачи ЕГЭ, и может возникнуть вопрос: зачем нужна еще одна книга? Здесь можно заметить, что автор преследует более дальние цели, нежели только поступление в вуз. Книга не заменит школьные учебники и тем более уроки, в ней нет той последовательности изложения материала, которая присуща методистам и которая рассчитана на годы обучения, но она поможет на некоторые вещи взглянуть под другим углом зрения. Автор не пытался включить в пособие как можно больше задач, поскольку хороших задачников с разобранными примерами решений более чем достаточно. В конце пособия (с. 150) вы найдете список литературы, где представлены не только книги, содержание которых «вписывается» в школьную программу, но и некоторые вузовские, в которых пройденные в школе темы получают дальнейшее развитие. Это, прежде всего, учебники и задачники по аналитической геометрии и алгебре. Для будущих математиков и физиков можно рекомендовать все выпуски физико-математического журнала «Квант» начиная с 1970 года, где можно найти не только разбор методов решения задач по самым разным разделам математики и физики, но и множество статей, написанных представителями этих наук. Если вы серьезно настроены на учебу, не стоит останавливаться на одном учебном пособии. Разные авторы по-разному раскрывают одни и те же темы, и разные читатели по-разному воспринимают один и тот же текст. К одной цели можно идти различными дорогами. Приобретение нескольких книг поможет сэкономить на репетиторах и между делом развить навык самостоятельной работы, который в жизни очень пригодится.

Сейчас главная беда значительной части первокурсников заключается даже не в слабой подготовке по математике, а именно в неумении и нежелании учиться. А учится человек для себя. Потому что ему интересно учиться. Потому что он хочет продолжить образование в лучших вузах страны и даже мира. Потому что он хочет стать специалистом, хозяином жизни, быть востребованным в обществе и государстве. Автор надеется, что данное пособие поможет будущим специалистам усовершенствовать свою математическую подготовку, а у кого-то пробудит интерес к математике. Замечания и предложения вы можете направлять по адресу: vovk.leonid55@gmail.com. Хотелось бы обратить внимание на тот факт, что инструмент, которым вы научитесь пользоваться сегодня, будет вашим верным другом на протяжении всей жизни. И если вы все-таки решили учиться, желаем запастись терпением.

Несмотря на то, что представления и решения в такой области математики, как алгебраические и иррациональные уравнения, уже давно сформировались, в книге приводится достаточно много новых подходов, позволяющих перед решением задачи правильно организовать, настроить свое мышление для выбора алгоритма решения. Выбранная тема носит фундаментальный характер, а приведенная классификация типов уравнений и методов их решения будет полезна для освоения всех тем элементарной математики. Большое внимание в пособии уделено характерным ошибкам и «опасным» преобразованиям при проведении выкладок.

В процессе работы над пособием автор опирался на личный опыт подготовки абитуриентов к вступительным экзаменам, опыт подготовки и проведения математических олимпиад, преподавания на различных факультетах вузов России и ДНР.

Материал распределен в соответствии с общими правилами изложения математических тем – от простого к сложному, поэтому позволяет постепенно овладевать соответствующим разделом.

Пособие состоит из двух глав, разбитых на параграфы в соответствии с предлагаемой классификацией типов уравнений и методов их решения.

В первой главе изучаются алгебраические уравнения, методы решения которых глубоко проникают во все темы элементарной математики. Значительное количество разобранных примеров и заданий всесторонне освещают методы и приемы решения рациональных и дробно-рациональных уравнений.

Во второй главе рассмотрены иррациональные уравнения – одна из самых сложных тем элементарной математики. Как правило, основная проблема у школьников здесь возникает со слабым владением методов решения рациональных уравнений. Подчеркивается глубокая связь разделов и на примерах иллюстрируется, как методы алгебры широко используются для решения иррациональных уравнений. Особое внимание уделено основному преобразованию данной темы – возведению обеих частей уравнения в четную степень и отбору корней при формулировке ответа.

Каждая глава заканчивается типовыми задачами, имеющими место на вступительных испытаниях, ГИА, ЕГЭ и олимпиадах различного уровня. По сожности эти задачи условно можно разделить на три уровня.

Учебное пособие ориентировано на широкий круг читателей: абитуриентов, школьников, готовящихся к математическим олимпиадам, студентов первого курса, а также школьных учителей математики, особенно преподающих в физико-математических классах. Изложенный материал будет полезен и студентам младших курсов, поскольку не вызывает сомнения тот факт, что многим студентам, вплоть до старших курсов не дают успешно учиться пробелы в знаниях по элементарной математике.

ГЛАВА I. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§1.1. Общие сведения

Уравнением с одной переменной называется равенство, содержащее эту переменную. Чаще всего уравнение записывается в виде

$$f(x)=g(x). \qquad (1.1)$$

В зависимости от характера функций $f(x)$ и $g(x)$ в элементарной математике рассматривают уравнение рациональное, иррациональное, тригонометрическое, показательное или логарифмическое. Если в уравнение входят различные типы функций, например тригонометрические и показательные, то его называют смешанным. Напомним некоторые общие понятия, связанные с решением всех типов уравнений.

Множество всех значений переменной x, при которых имеют смысл (определены) левая и правая части уравнения (1.1), называется *областью допустимых значений* (ОДЗ) или *областью определения* уравнения и обозначается через D. Таким образом, областью допустимых значений уравнения $f(x)=g(x)$ называется множество $D(f)\cap D(g)$, где $D(f)$ и $D(g)$ – области допустимых значений функций $f(x)$ и $g(x)$.

Определенное значение переменной называется *корнем* или *решением* уравнения, если при подстановке его в уравнение получается тождество.

Решить уравнение – это значит найти все его корни или доказать, что их нет.

Если из истинности высказывания **A** следует истинность высказывания **B**, то употребляют знак логического следования $\Rightarrow$, т.е. $\mathbf{A}\Rightarrow\mathbf{B}$ (из **A** следует **B**). Если $\mathbf{A}\Rightarrow\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}\Rightarrow\mathbf{A}$, то такие высказывания называются *равносильными* или *эквивалентными*. Записывается это так: $\mathbf{A}\Leftrightarrow\mathbf{B}$.

Два уравнения называются *эквивалентными* или *равносильными*, если множества их решений совпадают, т.е. любое решение первого уравнения является решением второго. И обратно, любое решение второго уравнения является решением первого. Другими словами равносильными будут уравнения, которые имеют одни и те же корни. Отметим, что равносильными будут и уравнения, каждое из которых не имеет корней.

Например, равносильны уравнения $2^{x-3}=8$ и $\sqrt{x-2}=2$, т.к. каждое из них имеет единственный корень $x=6$.

Преобразования, при которых уравнение переходит в равносильное ему уравнение, следующие: 1) перемена местами левой и правой частей уравнения; 2) перенос какого-либо слагаемого из одной части уравнения в другую с изменением его знака на противоположный; 3) умножение или деление обеих частей уравнения на отличное от нуля число; 4) добавление или вычитание из обеих частей уравнения одного и того же числа; 5) добавление или вычитание из обеих частей уравнения одной и той же функции при условии, что области определения полученного и исходного уравнения совпадают.

Если к обеим частям уравнения $3x^2+x=0$ добавить функцию $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$, то получим уравнение $3x^2+x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}$, которое неравносильно исходному, т.к. добавленное выражение имеет смысл не при всех x из ОДЗ уравнения, а только при значениях $x\neq 0$. Данное преобразование сузило ОДЗ уравнения, что может привести к потере корней. В данном случае значение $x=0$ является корнем исходного уравнения, но не является корнем преобразованного уравнения.

Если каждый корень уравнения $f(x)=g(x)$ является в то же время корнем уравнения $f_1(x)=g_1(x)$, полученного с помощью некоторых преобразований из уравнения $f(x)=g(x)$, то уравнение $f_1(x)=g_1(x)$

называют *следствием уравнения* $f(x)=g(x)$. Так, уравнение $x^2+3x=0$ является следствием уравнения $x+3=0$, а уравнение $x+3=0$ не является следствием уравнения $x^2+3x=0$.

Если каждое из двух уравнений является следствием другого из них, то такие уравнения являются равносильными.

Несколько уравнений с одной переменной образуют *совокупность уравнений*, если ставится задача об отыскании всех таких значений переменной, каждое из которых удовлетворяет по крайней мере одному из заданных уравнений. Уравнения, образующие совокупность, записывают либо в столбик с помощью квадратной скобки, например $\left[\begin{array}{l} 6x=x^2+5 \\ 2x+3=5x^2 \end{array}\right.$, либо в строку с помощью знака «;», например $6x=x^2+5;\ 2x+3=5x^2$.

Решением совокупности уравнений является объединение множеств корней уравнений, образующих данную совокупность. Например, уравнение $(x^2+4x-12)(2x^2+x-3)=0$ равносильно совокупности уравнений:

$$(x^2+4x-12)(2x^2+x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+4x-12=0 \\ 2x^2+x-3=0 \end{array}\right.$$

Решая каждое из уравнений совокупности, получаем корни исходного уравнения: $x_1=-6;\ x_2=2;\ x_3=1;\ x_4=-\frac{3}{2}$.

При решении уравнений приходится также применять «опасные» преобразования, которые могут привести к появлению посторонних корней или даже к потере корней. Причиной этого могут быть преобразования, выполняемые с помощью формул, изменяющих ОДЗ уравнений. Чаще всего это происходит при возведении в квадрат (или в любую четную степень) обеих частей уравнения, умножение (или деление) обеих частей уравнения на алгебраическое выражение, содержащее переменную, и т.д.

Во всех случаях, когда преобразование, выполняемое в процессе решения уравнения, приводит к уравнению, являющемуся следствием заданного уравнения, но не установлена равносильность полученного и заданного уравнений, необходима проверка найденных корней. Решение в этом случае не может считаться законченным, если не сделана проверка. Зачастую, однако, оказывается, что проверка корней оказывается сложнее решения уравнения. Например, это происходит, если найденные корни иррациональны. В этом случае необходимо провести доказательство равносильности выполняемых преобразований уравнения на всех этапах решения, т.е. определить «опасные» выкладки и обосновать их. Так, при умножении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестную, нужно исследовать те значения переменной, при которых это выражение обращается в нуль, а при возведении в четную степень обеих частей уравнения, необходимо потребовать перед этим преобразованием неотрицательности левой и правой части уравнения. Подробнее на этом остановимся далее при решении примеров.

Таким образом, решение уравнения обычно осуществляется в следующем порядке: 1) отыскивается ОДЗ уравнения; 2) исходное уравнение путем различного рода преобразований сводится к уравнению (чаще всего квадратному), корни которого могут быть найдены по известным формулам или по известному алгоритму. Находятся корни преобразованного уравнения; 3) проверяется принадлежность найденных корней к ОДЗ исходного уравнения; 4) выполняется проверка тех из найденных корней, которые принадлежат ОДЗ.

§1.2. Рациональные уравнения

Целое алгебраическое уравнение принято записывать в виде:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0, \tag{1.2}$$

где $a_0, a_1, .. a_n$ – заданные числа, x – неизвестное (переменная), n – степень алгебраического уравнения (наибольшая степень уравнения). Выражение

$P(x)$ называют *многочленом или полиномом степени n*, если коэффициент при старшей степени неизвестной не равен нулю $(a_0 \neq 0)$. Если в уравнении (1.2) $a_0 = 1$, то целое алгебраическое уравнение называется *приведенным*.

Уравнения, содержащие многочлены и алгебраические дроби (дроби вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены), называются *дробными алгебраическими уравнениями* или *дробно-рациональными уравнениями*.

При решении *линейного уравнения* $a \cdot x = b$ возможны три случая:

1) $a \neq 0$, тогда $x = \frac{b}{a}$ – единственный корень уравнения;

2) $a = 0, b = 0$, тогда уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$, что верно при любом *x*, т.е. ответом является $x \in R$

3) $a = 0, b \neq 0$, тогда уравнение принимает вид $0 \cdot x = b$, оно не имеет корней.

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ называется *квадратным уравнением* с одной переменной. Его корни вычисляются по формулам

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называют дискриминантом квадратного уравнения. Таким образом, квадратное уравнение имеет действительные корни только в случае $D \geq 0$.

Если $b = 2k$, $k \in Z$, т.е. b – четное число, то квадратное уравнение можно записать в виде $ax^2 + 2kx + c = 0$. Тогда формулу для корней квадратного уравнения можно упростить и использовать в виде

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Наконец, если к тому же $a = 1$, то формулы для определения корней уравнения $x^2 + 2kx + c = 0$ еще более упрощаются и принимают вид

$$x_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - c}.$$

При решении квадратных уравнений возможно использование *теоремы Виета*: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Путем разложения на множители квадратное уравнение можно записать в виде:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

При решении целых алгебраических уравнений преобразования, выполняемые в процессе решения, приводят только к уравнениям, равносильным заданному. Поэтому найденные корни формально можно не проверять. При решении же дробно-рациональных уравнений вида $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ обе части уравнения умножают на одно и то же выражение $Q(x)$, что может привести к появлению посторонних корней. Поэтому при решении дробно-рациональных уравнений необходима либо проверка, либо, если она затруднительна, отслеживание опасных выкладок и исключение тех значений неизвестной, при которых $Q(x) = 0$.

Дадим полную классификацию методов решения рациональных уравнений.

§1.3. Метод преобразования алгебраических выражений

Решение очень многих рациональных уравнений основано на удачной группировке и последующем приведении сгруппированных слагаемых к общему знаменателю. В более простых случаях группировка не требуется. При избавлении от общего знаменателя обе части уравнения по существу умножаются на функцию, содержащую неизвестную величину («опасная» выкладка!). В связи с этим возникает опасность получения посторонних решений, которая купируется либо проверкой, либо нахождением области допустимых значений (что, как правило, излишне), либо просто указанием соответствующих ограничений и дальнейшей проверкой их выполнения.

Пример 1.1. Решить уравнение

$$\frac{x+1}{2x-1}+\frac{x}{x-3}=\frac{3x}{2x-10}.$$

Решение. ОДЗ находится легко, поэтому выпишем ограничения на неизвестную, при которых знаменатели дробей не обращаются в нуль

$$\begin{cases} x\in R \\ 2x-1\neq 0 \\ x-3\neq 0 \\ 2x-10\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x\in R \\ x\neq \dfrac{1}{2} \\ x\neq 3 \\ x\neq 5 \end{cases}$$

Теперь можно не сохранять общий знаменатель при проведении преобразований. Перенося все слагаемые в левую часть и умножая обе части уравнения на $(2x-1)(x-3)(2x-10)\neq 0$, получим

$$(x+1)(x-3)(2x-10)+x(2x-1)(2x-10)-3x(2x-1)(x-3)=0 \Rightarrow$$

$$2\left(x^2-2x-3\right)(x-5)+2\left(2x^2-x\right)(x-5)-3\left(2x^2-x\right)(x-3)=0 \Rightarrow$$

$$2(x-5)\left(x^2-2x-3+2x^2-x\right)-3\left(2x^3-7x^2+3x\right)=0 \Rightarrow$$

$$6(x-5)\left(x^2-x-1\right)-3\left(2x^3-7x^2+3x\right)=0 \Rightarrow$$

$$3\left(2\left(x^3-6x^2+4x+5\right)-\left(2x^3-7x^2+3x\right)\right)=0 \Rightarrow$$

$$-5x^2+5x+10=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-x-2=0 \Rightarrow x_1=-1; \quad x_2=2.$$

Оба решения принадлежат ОДЗ.

Ответ: $x_1=-1;\ \ x_2=2$.

§1.4. Метод разложения на сомножители

Данный метод состоит в том, чтобы, используя группировку слагаемых, а также формулы сокращенного умножения, привести исходное уравнение к виду, когда слева записано произведение сомножителей, а справа – нуль. Затем каждый из сомножителей приравнивается к нулю, и путем решения простейших уравнений находятся корни исходного уравнения.

Другими словами, метод разложения на сомножители заключается в следующем: если $f(x)= f_1(x)\cdot f_2(x)\cdots f_n(x)$, то всякое решение уравнения

$$f(x)=0 \qquad (1.3)$$

является решением совокупности уравнений

$$f_1(x)=0;\quad f_2(x)=0;\ \ldots;\ f_n(x)=0 \qquad (1.4)$$

Представление уравнения (1.3) в виде (1.4) иногда называют факторизованным видом уравнения (1.3) (от английского слова «factor» – множитель).

Метод разложения на сомножители является одним из основных методов решения абсолютно всех типов уравнений. При решении рациональных уравнений реализация этого метода проходит либо формально при помощи теоремы Безу, если речь идет о нахождении рациональных корней, либо при помощи группировки отдельных групп слагаемых с целью нахождения общего сомножителя в этих группах.

Теорема Безу находит применение не только при решении уравнений, но и в задачах, связанных с делимостью многочленов (нахождение остатка при делении многочленов, определение кратности многочленов и т.д.), с разложением многочленов на множители, с определением кратности корней и многих других.

Теорема 1 (теорема Безу). Остаток от деления полинома $P_n(x)$ на двучлен (x-a) равен значению этого полинома при x=a.

Следствие 1. Остаток от деления полинома $P_n(x)$ на двучлен ax+b равен значению этого полинома при x=–b/a , т. е. $R=P_n(-b/a)$.

Следствие 2. Если число a является корнем многочлена $P_n(x)$, то этот многочлен делится на (x–a) без остатка.

Следствие 3. Если многочлен P(x) имеет попарно различные корни α_1, α_2,…,α_n, то он делится на произведение двучленов $(x–\alpha_1)$ $(x–\alpha_n)$ без остатка.

Следствие 4. Многочлен степени n имеет не более n различных корней .

Следствие 5. Для любого многочлена P(x) и числа α разность (P(x)–P(α)) делится без остатка на двучлен (x–α).

Следствие 6. Число a является корнем многочлена P(x) степени не ниже первой тогда и только тогда, когда P(x) делится на (x-a) без остатка.

Следствие 7. Многочлен, не имеющий действительных корней, в разложении на множители линейных множителей не содержит.

Следствие 8. Если коэффициенты приведенного целого алгебраического уравнения

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad \textbf{(1.5)}$$

являются целыми числами, то целые корни следует искать среди делителей свободного члена a_n.

Пример 1.2. Найти остаток от деления многочлена $x^3 - 3x^2 + 6x - 5$ на двучлен $x - 2$.

Решение. По теореме Безу $R = P_3(2) = 2^3 - 3\cdot 2^2 + 6\cdot 2 - 5 = 3$.

Ответ: $R = 3$.

Пример 1.3. Найти остаток от деления многочлена четвертой степени $32x^4 - 64x^3 + 8x^2 + 36x + 4$ на двучлен $2x - 1$.

Решение. Согласно следствию 1 из теоремы Безу

$$R = P_4\left(\frac{1}{2}\right) = 32\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 64\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 8\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 36\left(\frac{1}{2}\right) + 4 = 18.$$

Ответ: $R = 18$.

Основное внимание при рассмотрении последующих задач рассмотрим решению целых алгебраических уравнений при помощи теоремы Безу. При этом будут использоваться следствия 2 и 3 из этой теоремы. Последовательность действий при этом формализована и содержит следующие этапы.

1. Находим целый корень x_1 при помощи перебора делителей свободного члена и подстановки их в уравнение.

2. Делим многочлен из левой части уравнения на двучлен $x - x_1$. Согласно следствию 6 после такого деления остаток будет равен нулю. Этот факт может служить контролем достоверности проводимых преобразований. Если остаток получается не равным нулю, то ошибку следует искать либо на этапе подбора корня, либо в процедуре деления многочлена на многочлен.

3. Частное от деления в предыдущем пункте – многочлен $(n-1)$–й степени. Возвращаемся к пункту 1 и аналогично ищем его корень.

4. Продолжаем процесс до того момента, когда полученный после деления многочлен не станет многочленом второй степени. Его корни находим, решая соответствующее квадратное уравнение.

Пример 1.4. Решить уравнение

$$x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16 = 0.$$

Решение.

1. Целые корни ищем среди делителей свободного члена, т.е. выбираем их из чисел $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 4;\ \pm 8;\ \pm 16$. Подставляем поочередно эти числа в уравнение и определяем, что число $x_1 = -1$ обращает его в тождество, т.е. является корнем уравнения.

2. Делим данный многочлен на двучлен $x - (-1) = x + 1$. Процедура деления многочлена на многочлен напоминает процедуру деления «в столбик» обычных чисел, только при подборе сомножителя в частном руководствуемся тем, чтобы в процессе вычитания сокращались только старшие степени x. Имеем:

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16 & \;x + 1 \\ \cline{2-2} \underline{x^4 + x^3} & x^3 - 4x^2 - 4x + 16 \end{array}$$

$$-4x^3-8x^2$$
$$\underline{-4x^3-4x^2}$$
$$-4x^2+12x$$
$$\underline{-4x^2-4x}$$
$$16x+16$$
$$\underline{16x+16}$$
$$0$$

Тот факт, что остаток равен нулю, свидетельствует об отсутствии ошибок в преобразованиях.

3. Теперь уравнение перепишется в виде

$$(x+1)\left(x^3-4x^2-4x+16\right)=0.$$

Перебираем делители свободного члена в многочлене третьего порядка

$$P_3(x)=x^3-4x^2-4x+16.$$

Приходим к выводу, что следующий корень уравнения $x_2=-2$. Таким образом, можно записать, что

$$P_3(x)=x^3-4x^2-4x+16=(x+2)\cdot P_2(x)$$

Для определения $P_2(x)$ производим еще одно деление многочлена $P_3(x)$ на двучлен $(x+2)$.

$$\begin{array}{l|l} x^3-4x^2-4x+16 & x+2 \\ \cline{2-2} \underline{x^3+2x^2} & x^2-6x+8 \end{array}$$
$$-6x^2-4x$$
$$\underline{-6x^2-12x}$$
$$8x+16$$
$$\underline{8x+16}$$
$$0$$

4. Собираем результаты. После подбора двух корней исходное уравнение принимает вид

$$(x+1)(x+2)(x^2-6x+8)=0$$

Осталось решить квадратное уравнение

$$x^2-6x+8=0.$$

Его корни: $x_3=2$ и $x_4=4$.

Ответ: $x_1=-2;\ x_2=-1;\ x_3=2;\ x_4=4$.

Реализация описанного алгоритма практически не претерпевает изменений при решении неполных уравнений. В этом случае в уравнении отсутствуют члены, содержащие некоторые степени неизвестной.

Пример 1.5. Решить уравнение

$$x^3+5x^2-12=0.$$

Решение. Для формализации процесса деления «неполного» многочлена на двучлен можно представить его полным, учитывая, что коэффициент при соответствующей степени неизвестной равен нулю.

Для нашего примера имеем

$$x^3+5x^2-12=x^3+5x^2+0\cdot x-12$$

Целые корни снова ищем среди делителей свободного члена, т.е. анализируем из числа $\pm1;\ \pm2;\ \pm4;\ \pm6;\ \pm12$. Как правило, корень подбирается из небольших чисел, первых в списке. Процедура проверки больших чисел, например ±12 приведет к вычислительным трудностям. Проводим операцию деления, учитывая, что значение $x=-2$ обращает многочлен в нуль.

$$\begin{array}{l|l}
x^3+5x^2+0\cdot x-12 & x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3+2x^2} & x^2+3x-6 \\
\quad 3x^2+0\cdot x & \\
\quad \underline{3x^2+6x} & \\
\qquad -6x-12 & \\
\qquad \underline{-6x-12} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Уравнение разбито на сомножители: $(x+2)(x^2+3x-6)=0$, приравниваем каждый из них нулю.

$$\left[\begin{array}{l} x+2=0 \\ x^2+3x-6=0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_1=-2 \\ x_{2,3}=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{2} \end{array}\right.$$

Область допустимых значений неизвестного – вся числовая ось, поэтому проверку можно не делать, тем более она затруднительна.

Ответ: $x_1=-2$; $x_{2,3}=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$.

Перейдем к процедуре определения рациональных корней целого алгебраического уравнения (1.2), у которого коэффициент при старшей степени неизвестной $a_0\neq 1$. В этом случае простое деление на этот коэффициент всего уравнения с целью сведения его к приведенному и последующему применению рассмотренной процедуры не приведет к цели, поскольку коэффициенты уравнения становятся дробными, что нарушает условия следствия 8 из теоремы Безу.

Умножим обе части уравнения (1.2) на a_0^{n-1}:

$$a_0^n x^n + a_1 a_0^{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} a_0^{n-1} x + a_0^{n-1} a_n = 0.$$

Полученное уравнение после введения новой переменной $y=a_0 x$ принимает вид приведенного

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} a_0^{n-2} y + a_0^{n-1} a_n = 0.$$

Если исходное уравнение (1.2) имело рациональные корни, то полученное в терминах новой переменной y приведенное уравнение имеет целые корни, которые, как и ранее, следует искать среди делителей свободного члена. Решив приведенное уравнение, возвращаемся к исходной переменной $x=\dfrac{y}{a_0}$.

Пример 1.6. Решить уравнение

$$3x^3-7x^2+5x-1=0.$$

Решение. Умножаем обе части уравнения на 3^2. Имеем:

$$3^3x^3 - 7\cdot 3^2x^2 + 15\cdot 3x - 9 = 0$$

Обозначим $y = 3x$ и запишем уравнение в виде

$$y^3 - 7y^2 + 15y - 9 = 0$$

Целые корни ищем среди делителей числа 9, т.е. среди чисел $\pm 1; \pm 3$. Имеем $y_1 = 1$. Находим частное от деления многочлена $y^3 - 7y^2 + 15y - 9$ на $y - 1$:

$$\begin{array}{l|l}
y^3 - 7y^2 + 15y - 9 & y-1 \\ \cline{2-2}
\underline{y^3 - y^2} & y^2 - 6y + 9 \\
\quad -6y^2 + 15y & \\
\quad \underline{-6y^2 + 6y} & \\
\qquad\quad 9y - 9 & \\
\qquad\quad \underline{9y - 9} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Таким образом, после разложения на сомножители решаем уравнение

$$(y-1)(y-3)^2 = 0,$$

которое имеет корни $y_1 = 1$ и $y_{2,3} = 3$. Возвращаемся к переменной x и получаем решение исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = \dfrac{1}{3}$; $x_{2,3} = 1$.

Уравнения, левая часть которых представляет собой многочлен с целыми коэффициентами и свободным членом, равным 1 или –1 (иногда 2 и –2), преобразуются в приведенные уравнения с помощью почленного деления на x в старшей степени и последующей замены $\dfrac{1}{x} = t$. Нетрудно установить, что такое деление не приводит к потере корней, так как $x = 0$ не является корнем уравнения, свободный член которого отличен от нуля.

Пример 1.7. Решить уравнение

$$10x^3-3x^2-2x+1=0.$$

Решение. После деления на x^3 получаем

$$10-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}=0.$$

Полагая $\frac{1}{x}=t$, приходим у уравнению

$$t^3-2t^2-3t+10=0.$$

Находим методом подбора целый корень этого уравнения $t=-2$ и разделив многочлен $t^3-2t^2-3t+10$ на $t+2$, получим квадратный трехчлен t^2-4t+5, который действительных корней не имеет. Так как $x=\frac{1}{t}$, то $x=-\frac{1}{2}$.

Ответ: $x=-\frac{1}{2}$.

В более сложных случаях, когда методы, предлагаемые выше, не приводят к цели, может быть полезна следующая теорема.

Теорема 2. Пусть коэффициенты уравнения (1.2) $a_0, a_1, ..., a_n$ ***являются целыми числами. Если несократимая дробь*** $x=\frac{p}{q}$ ***является корнем уравнения (1.2), то число p является делителем свободного члена*** a_n***, а число q – делителем старшего коэффициента*** a_0***.***

Пример 1.8. Решить уравнение

$$3x^3+5x^2+8x+4=0.$$

Решение. Старший коэффициент уравнения равен трем, поэтому q может принимать значения $\pm1; \pm3$. Далее, свободный член уравнения равен четырем, т.е. в соответствии с теоремой 2, параметр p может принимать значения $\pm1; \pm2; \pm4$. Таким образом, рациональные корни уравнения следует искать среди чисел

$$\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 4;\ \pm\frac{1}{3};\ \pm\frac{2}{3};\ \pm\frac{4}{3}.$$

Согласно теореме 2 никаких других рациональных корней данное уравнение иметь не может. Перебирая варианты, приходим к выводу, что $x = -\frac{2}{3}$ действительно обращает уравнение в тождество. Разделив «уголком» левую часть уравнения на $x+\frac{2}{3}$ (а еще лучше – на $3x+2 = 3\left(x+\frac{2}{3}\right)$), получим

$$(3x+2)\left(x^2+x+2\right) = 0.$$

Теперь легко убедиться, что $x = -\frac{2}{3}$ – единственный действительный корень уравнения.

Ответ: $x = -\frac{2}{3}$.

§1.5. Метод группировки

Метод группировки слагаемых, как правило, применяется совместно с другими методами разложения на множители и чаще всего с методом вынесения за скобки. Суть метода состоит в том, что все слагаемые данного многочлена перегруппировываются таким образом, чтобы в каждой группе, возможно после вынесения общего множителя за скобки, образовалось бы одно и то же выражение. Это выражение можно вынести за скобки как общий для всех групп множитель.

Метод группировки может быть применен совместно с теоремой Безу. На первом этапе решения определяют подбором рациональный корень уравнения x_1. Тем самым определяется вид двучлена $(x - x_1)$, который можно вынести за знак всей левой части уравнения. После этого не представляет особого труда объединить в группы слагаемые левой части, которые содержат при разложении множитель $(x - x_1)$.

Если же целое алгебраическое уравнение не имеет рациональных корней, реализация алгоритма метода группировки сильно усложняется, но остается единственным способом решения.

Пример 1.9. Решить уравнение

$$x^3 - 3x + 2 = 0.$$

Решение. Распишем одночлен $-3x$, как $-3x = -x - 2x.$

Тогда исходное уравнение принимает вид: $x^3 - x - 2x + 2 = 0.$ Теперь группируем:

$$x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = 0,$$
$$(x - 1)(x(x + 1) - 2) = 0,$$
$$\left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \\ x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2, x_3 = 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1 = x_3 = 1, x_2 = -2.$

Пример 9 мог быть решен и при помощи теоремы Безу. Это практически не усложнило бы решение, но внесло бы формализм в процедуру решения, что немаловажно в условиях экзамена. В следующем примере метод группировки – единственный метод решения.

Пример 1.10. Решить уравнение

$$x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = 0.$$

Решение. Попробуем какой-нибудь член уравнения представить в виде суммы нескольких слагаемых таким образом, чтобы осуществить группировку, позволяющую получить удачное разложение на сомножители. Положим $3x^2 = x^2 + 2x^2$. Тогда получим

$$\left(x^4 + x^3 + x^2\right) + \left(2x^2 + 2x + 2\right) = 0$$

и далее

$$x^2\left(x^2 + x + 1\right) + 2\left(x^2 + x + 1\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 + 2\right) = 0$$

Задача сведена к решению совокупности уравнений

$$x^2 + x + 1 = 0; \qquad x^2 + 2 = 0.$$

Каждое из полученных квадратных уравнений имеет отрицательный дискриминант и поэтому действительных корней не имеет. Следовательно, не имеет решений и исходное уравнение.

Ответ: $x \in \varnothing$.

В следующей задаче для успешного решения необходимо увидеть общий сомножитель после операции приведения к общему знаменателю.

Пример 1.11. Решить уравнение

$$\frac{3x^2}{2x^2+1} + 6x^2 - 10x + 3 = 0.$$

Решение. Данное уравнение формально относится к классу дробно-рациональных уравнений. Поэтому предварительно находим его ОДЗ: $2x^2 + 1 \neq 0$, т.е. $x \in R$.

Избавление от знаменателя и сведение задачи к целому алгебраическому уравнению с последующим применением рассмотренных выше стандартных методов требует большого количества преобразований. Например, только избавление от знаменателя существенно усложняет уравнение. К тому же, проводя эти выкладки, нужно быть уверенным в наличии как минимум двух рациональных корней исходного уравнения, что вовсе не обязательно. Следует учитывать, что и вероятность ошибки в выкладках в этом случае существенно возрастает.

Другой характерный приём – разложение квадратного трехчлена на сомножители, в данном случае $(6x^2 - 10x + 3)$, также ничего не даёт.

Внимательное изучение условия должно навести на мысль позаимствовать из заключительных трех слагаемых левой части некоторое выражение. Данное преобразование должно преследовать две цели: во-первых, после его выделения желательно, чтобы оставшийся квадратный трехчлен упрощался или раскладывался на сомножители и, во-вторых, что более важно, после сложения этого выражения с дробью, в числителе образовывался тот же квадратный трехчлен.

Реализация этих действий потребует, очевидно, нескольких попыток. Приведем в решении нужный вариант. Именно, заметим, что три заключительных слагаемых будут пропорциональны тройке, если мы представим линейное слагаемое в виде $-10x = -9x - x$. Теперь реализация приведенных выше рассуждений приведет к записи уравнения в виде

$$\left(\frac{3x^2}{2x^2+1} - x\right) + 6x^2 - 9x + 3 = 0.$$

Приводим выражение в скобках к общему знаменателю и выносим тройку из оставшихся членов уравнения:

$$\frac{3x^2 - 2x^3 - x}{2x^2+1} + 3\cdot\left(2x^2 - 3x + 1\right) = 0.$$

Теперь уже видно, что за знак левой части уравнения выносится общий сомножитель $2x^2 - 3x + 1$. Завершаем решение:

$$\frac{-x\left(2x^2-3x+1\right)}{2x^2+1} + 3\cdot\left(2x^2-3x+1\right) = 0 \Rightarrow \left(2x^2-3x+1\right)\left(3 - \frac{x}{2x^2+1}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\left(2x^2-3x+1\right)\left(6x^2-x+3\right)}{2x^2+1} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 2x^2-3x+1=0 \\ 6x^2-x+3=0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 1;\ x_2 = \dfrac{1}{2}. \\ x \in \varnothing \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1 = 1;\ x_2 = \dfrac{1}{2}$.

В более сложных уравнениях, где действия по группировке слагаемых далеко не очевидны, приходится предугадывать преобразования, как минимум на два шага вперед, чтобы увидеть общий сомножитель в левой части уравнения. Подобные навыки возникают только при решении большого количества уравнений.

Пример 1.12. Решить уравнение

$$2x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 8x + 6 = 0.$$

Решение. Подбор корней уравнения по старшему коэффициенту и свободному члену займет много времени и ни к чему не приведет, поскольку данное уравнение рациональных корней не имеет. Применяем метод группировки в «чистом» виде: объединяем в одну группу первое, третье и пятое, а во вторую – второе и четвертое слагаемое.

$$\left(2x^4 - 7x^2 + 6\right) + \left(4x^3 - 8x\right) = 0.$$

Выражение в первых скобках – биквадратный трехчлен. Обозначив $x^2 = z$, можно свести его к квадратному трехчлену $2z^2 - 7z + 6$ и разложить его на сомножители, предварительно вычислив корни

$$2z^2 - 7z + 6 = (2z - 3)(z - 2)$$

Возвращаемся к переменной x и получаем разложение биквадратного трехчлена

$$2x^4 - 7x^2 + 6 = \left(2x^2 - 3\right)\left(x^2 - 2\right).$$

Теперь понятно, что нужно сделать со второй группой слагаемых – выделить сомножитель $\left(x^2 - 2\right)$. Имеем

$$\left(2x^2 - 3\right)\left(x^2 - 2\right) + 4x\left(x^2 - 2\right) = 0.$$

Остальные преобразования можно не комментировать:

$$\left(x^2 - 2\right)\left(2x^2 - 4x - 3\right) = 0 \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x^2 - 2 = 0 \\ 2x^2 - 4x - 3 = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \pm\sqrt{2}; \\ x_{3,4} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{10}}{2} \end{array}\right. .$$

Ответ: $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$; $x_{3,4} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{10}}{2}$.

§1.6. Применение формул сокращенного умножения

Довольно эффективно применяются при разложении многочлена на множители формулы сокращенного умножения. Полезно помнить следующие формулы:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \tag{1.6}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \quad (1.7)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b) \quad (1.8)$$

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4 \quad (1.9)$$

$$(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5 \quad (1.10)$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \quad (1.11)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \quad (1.12)$$

$$a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (a^2 + b^2)(a-b)(a+b) \quad (1.13)$$

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) \quad (1.14)$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$
$$n \in Z. \quad (1.15)$$

Пример 1.13. Решить уравнение

$$4 = 25(x^2 - 2x + 1)(x-2)^2$$

Решение. Этот пример характеризует большую роль формул сокращенного умножения при группировке слагаемых. Раскрытие скобок при решении данного примера приведет к сложному уравнению четвертого порядка, решение которого практически невозможно. К тому же подобная выкладка «уничтожит» структуру исходного уравнения. Если переписать уравнение в виде

$$2^2 = [5(x-1)(x-2)]^2,$$

то можно увидеть, что мы имеем уравнение вида

$$f^2(x) = g^2(x)$$

Этот тип уравнений будет достаточно часто встречаться в последующем. Решение предполагает перенесение всех слагаемых в одну часть и разложения ее на сомножители при помощи формулы (1.11) для разности квадратов. В общем случае имеем

$$f^2(x) - g^2(x) = 0 \;\Rightarrow\; (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = 0$$

Таким образом, получены готовые формулы для рассматриваемого типа уравнений:

$$f^2(x) = g^2(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$$

Вернемся к нашему примеру и конкретизируем для него функции $f(x) = 2$ и $g(x) = 5(x^2 - 3x + 2)$. Имеем

$$\left(2 - 5(x^2 - 3x + 2)\right) \cdot \left(2 + 5(x^2 - 3x + 2)\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\left(-5x^2 + 15x - 8\right) \cdot \left(5x^2 - 15x + 12\right) = 0$$

Равенство нулю первого сомножителя дает корни $x_{1,2} = \dfrac{15 \pm \sqrt{65}}{10}$. Второй сомножитель имеет отрицательный дискриминант и действительных корней не имеет.

Для формального обоснования решения нужно сделать проверку, но, поскольку она очень сложна, то убеждаемся в равносильности всех преобразований, находим ОДЗ: $x \in R$ и записываем ответ.

Ответ: $x_{1,2} = \dfrac{15 \pm \sqrt{65}}{10}$.

Левая часть формулы разности квадратов может быть «скрыта» в условии. Особенно трудно привести уравнение к виду $f^2(x) = g^2(x)$, если в качестве функций $f(x)$ и (или) $g(x)$ подразумеваются квадратные трехчлены. В этом случае придется делать, скорее всего, несколько попыток подбора указанных функций.

Пример 1.14. Решить уравнение

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 22x - 23 = 0.$$

Решение. Прежде всего, при решении этого уравнения нужно попробовать подобрать рациональные корни уравнения. Свободный член имеет всего четыре делителя (± 1 и ± 23), поэтому эти попытки займут мало времени, однако к успеху не приведут. Далее ориентируясь на выражение

x^4-2x^3, можно сделать попытку дополнить его до полного квадрата $\left(x^2-x\right)^2=x^4-2x^3+x^2$, вычитая и добавляя x^2. Например,

$$\left(x^4-2x^3+x^2\right)+x^2-22x-23=0\text{, т.е., }\left(x^2-x\right)^2=-\left(x^2-22x-23\right).$$

Наши ожидания не оправдались: правая часть выписанного уравнения не сводится к полному квадрату. Расширим поле поиска функций $f(x)$ и $g(x)$, взяв в качестве одной из них квадратный трехчлен. Сделав несколько попыток, остановимся на трехчлене x^2-x+2. Действительно, возведем этот трехчлен в квадрат, чтобы выделить этот квадрат в левой части уравнения. Имеем

$$\begin{gathered}\left(x^2-x+2\right)^2=\left(\left(x^2-x\right)+2\right)^2=x^4-2x^3+x^2+4\left(x^2-x\right)+4=\\=x^4-2x^3+5x^2-4x+4.\end{gathered}$$

Ориентируясь на полученное выражение, перепишем исходное уравнение в виде

$$x^4-2x^3+\left(5x^2-3x^2\right)-\left(4x+18x\right)+4-27=0.$$

Таким образом,

$$x^4-2x^3+5x^2-4x+4=3x^2+18x+27.$$

Цель достигнута: уравнение можно представить в нужном виде, а именно

$$\left(x^2-x+2\right)^2=\left(\sqrt{3}(x+3)\right)^2.$$

Заканчиваем решение:

$$\left[\begin{array}{l}x^2+x-2=\sqrt{3}(x+3)\\x^2+x-2=-\sqrt{3}(x+3)\end{array}\right.\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{l}x^2+x-2-\sqrt{3}(x+3)=0\\x^2+x-2+\sqrt{3}(x+3)=0\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}x^2-\left(\sqrt{3}-1\right)x-\left(2+3\sqrt{3}\right)=0\\x^2-\left(\sqrt{3}+1\right)x+\left(3\sqrt{3}-2\right)=0\end{array}\right.\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{l}x_{1,2}=\dfrac{\sqrt{3}-1\pm\sqrt{11+10\sqrt{3}}}{2}\\x\in\varnothing\ (D<0)\end{array}\right..$$

Ответ: $x_{1,2}=\dfrac{\sqrt{3}-1\pm\sqrt{11+10\sqrt{3}}}{2}$.

Пример 1.14 характеризует основные моменты алгоритма метода дополнения до полного квадрата, о котором речь пойдет ниже. В следующем примере иллюстрируется применение формулы (1.12) для разности кубов.

Пример 1.15 . Решить уравнение

$$x^3 + 2x - 4\sqrt{2} = 0.$$

Решение. Представляем свободный член уравнения в виде $-4\sqrt{2} = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$. Тогда, имея в виду формулу для разности кубов, возможно сгруппировать члены уравнения таким образом

$$\left(x^3 - 2\sqrt{2}\right) + 2\left(x - \sqrt{2}\right) = 0.$$

Дальнейшие преобразования очевидны:

$$\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x^2 + \sqrt{2}x + 2\right) + 2\left(x - \sqrt{2}\right) = 0 \Rightarrow \qquad \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x^2 + \sqrt{2}x + 4\right) = 0$$

Второй сомножитель в нуль не обращается (отрицательный дискриминант).

Ответ: $x = \sqrt{2}$.

Гораздо сложнее увидеть в условии структуру формул (1.7) и (1.8) для куба суммы или куба разности. Задачи такого рода относятся к усложненным, поскольку догадаться по структуре уравнения о применении формул (1.7) или (1.8) можно только хорошо ориентируясь в методах решения алгебраических уравнений. Все же полезно написать формулы для $(x \pm 1)^3$, $(x \pm 2)^3$, $(x \pm 3)^3$ и увидеть их составляющие в условии задачи. Если же удастся свести уравнение к виду $f^3(x) = g^3(x)$, то его решение элементарно и имеет вид $f(x) = g(x)$.

Иллюстрацию решений подобных задач начнем с примеров наиболее простой структуры.

Пример 1.16. Решить уравнение

$$28x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Решение. Запишем формулу $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$. Видим, что уравнение содержит в левой части выражение $3x^2 + 3x + 1$, присутствующее и в приведенной формуле. Не достает только слагаемого x^3. Позаимствуем его из слагаемого $28x^3$. Последующие преобразования комментариев не требуют:

$$27x^3 + \left(x^3 + 3x^2 + 3x + 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+1)^3 = (-3x)^3 \quad \Rightarrow$$

$$x + 1 = -3x \quad \Rightarrow \quad 4x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{4}.$$

Ответ: $x = -\frac{1}{4}$.

Пример1.17 . Решить уравнение

$$x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x + 4 = 0.$$

Решение. Первые три слагаемых в левой части уравнения напоминают структуру формулы куба суммы. Воспользуемся этим для построения алгоритма решения. Вначале умножаем обе части на три:

$$3x^3 + 3x^2 + x + 12 = 0.$$

Приравниваем степени коэффициентов и неизвестных так, как мы это делали при решении целых алгебраических уравнений для случая $a_0 \neq 1$. Именно, еще раз умножаем обе части на 3^2:

$$\left(3^3 x^3\right) + 3 \cdot \left(3^2 x^2\right) + 3 \cdot (3x) + 108 = 0.$$

Наконец, пришло время выделить полный куб суммы, добавляя и вычитая единицу:

$$\left(3^3 x^3\right) + 3 \cdot \left(3^2 x^2\right) + 3 \cdot (3x) + 1 + 107 = 0 \quad \Rightarrow \quad (3x+1)^3 = -107.$$

Извлекаем кубический корень из обеих частей уравнения и решаем полученное уравнение относительно x:

$$3x + 1 = -\sqrt[3]{107} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{107} + 1\right).$$

Ответ: $x = -\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{107} + 1\right)$.

В следующей задаче, несмотря на идентичность идеи решения, реализация ее происходит намного сложнее.

Пример 1.18. Решить уравнение

$$x^3+9x^2-18x+12=0.$$

Решение. Рациональных корней данное уравнение не имеет, в чем можно убедиться, перебирая делители числа 12. Группировка слагаемых также к цели не приводит. Попробуем выделить в одной из частей уравнения полный куб разности. Предпосылки для этого есть: левая часть уравнения немного напоминает формулу для куба суммы. Однако, сходу выделение куба суммы в левой части уравнения к цели не приводит. Например, напрашиваются следующие преобразования, выделяющие куб двучлена $(x+3)^3$:

$$x^3+9x^2+27x+27=45x+15 \Rightarrow \qquad (x+3)^3=15(3x+1).$$

Видим, что правая часть уравнения при данных преобразованиях не отвечает нашим ожиданиям и не может быть сведена к кубу двучлена.

Вернемся к исходному уравнению и попробуем выделить в нем куб разности. Поскольку в формуле (1.8) для куба разности двух чисел знаки чередуются, то первое, что нужно сделать – это продублировать нужное сочетание знаков в формуле (1.8), в соответствии с которой коэффициент при x^2 должен быть отрицательным и далее с уменьшением показателя степени чередоваться. Такого сочетания знаков мы добьемся, если перенесем в правую часть второе, третье и четвертое слагаемые. Имеем

$$x^3=-9x^2+18x-12.$$

В правой части выписанного уравнения не хватает первого слагаемого, содержащего x^3, и число –12 не является кубом никакого числа. Начнем со второго несоответствия, поскольку слагаемое, содержащее x^3, можно всегда добавить в левую и правую часть уравнения, что мы и сделаем позднее. Итак, ближайшее к –12 число, представляющее собой куб, это –8. Сделаем преобразование правой части таким образом, чтобы она содержала –8. Учитываем, что $-12=\frac{3}{2}\cdot(-8)$ и записываем наше уравнение в виде

$$x^3 = \frac{3}{2}\left(-6x^2 + 12x - 8\right) \text{ или } 2x^3 = 3\left(-6x^2 + 12x - 8\right).$$

Теперь подошла очередь выписать формулу для полного куба разности $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ и увидеть в ней слагаемые, присутствующие в правой части нашего уравнения. Остается дополнить правую часть недостающим слагаемым, содержащим x^3. Для этого добавляем в левую и правую части уравнения слагаемое $3x^3$. Имеем:

$$5x^3 = 3\left(x^3 - 6x^2 + 12x - 8\right) \qquad \Rightarrow \qquad 5x^3 = 3(x-2)^3.$$

Цель достигнута: уравнение приведено к виду $f^3(x) = g^3(x)$, а именно

$$\left(\sqrt[3]{5}\cdot x\right)^3 = \left(\sqrt[3]{3}\cdot(x-2)\right)^3$$

Таким образом, $\sqrt[3]{5}\cdot x = \sqrt[3]{3}\cdot(x-2)$. Отсюда находим x:

$$x = \frac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{5}}$$

Ответ: $x = \dfrac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{5}}$.

В сложных алгебраических уравнениях зачастую очень трудно провести удачную группировку слагаемых. В этом случае, возможно, уравнение имеет специфическую структуру, позволяющую провести либо специальную группировку слагаемых, либо специальную замену переменных (об этом речь будет идти ниже).

Теорема 3. Если в уравнении $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ выполняется следующие зависимости между коэффициентами

$$a+b=b+c+d=d+e, \tag{1.16}$$

то левая часть уравнения раскладывается на множители, одним из которых будет x^2-x+1, а второй находится делением левой части уравнения на x^2-x+1.

Пример 1.19. Решить уравнение

$$2x^4 + x^3 - 4x^2 + 6x - 3 = 0.$$

Решение. Проверим выполнение условий теоремы 3. В нашем уравнении коэффициенты при неизвестных равны

$$a=2,\ b=1,\ c=-4,\ d=6,\ e=-3.$$

Соотношение (1.16) из теоремы 3 выполняется, поэтому левая часть уравнения нацело делится на трехчлен x^2-x+1. Производим процедуру деления уголком

$$\begin{array}{l|l}
2x^4+\ \ x^3-4x^2+6x-3 & x^2-x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^4-2x^3+2x^2} & 2x^2+3x-3 \\
\quad\ 3x^3-6x^2+6x & \\
\quad\ \underline{3x^3-3x^2+3x} & \\
\qquad -3x^2+3x-3 & \\
\qquad \underline{-3x^2+3x-3} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Уравнение примет вид:

$$\left(x^2-x+1\right)\left(2x^2+3x-3\right)=0\,.$$

Первый сомножитель не имеет действительных корней, а второй сомножитель имеет два корня, которые и представляют ответ.

Ответ: $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{4}$.

§1.7. Решение уравнений относительно коэффициентов.

Этот прием состоит в том, что уравнение рассматривается не относительно неизвестной, а записывается в виде квадратного уравнения относительно какого-либо коэффициента, входящего в уравнение. Естественно, этот метод приведет к цели, если дискриминант получающегося квадратного уравнения будет представлять полный квадрат некоторой функции от x. Суть этого метода легче всего понять на примере.

Пример 1.20. Решить уравнение

$$4x^3-4\sqrt{5}x^2+5x-2\sqrt{5}+4=0.$$

Решение. Введем вспомогательный параметр, обозначив $\sqrt{5}=a$. Уравнение примет вид:

$$4x^3-4ax^2+a^2x-2a+4=0.$$

Рассмотрим и решим это уравнение как квадратное относительно коэффициента a (при этом учитываем, что $x=0$ не является корнем уравнения):

$$xa^2-\left(4x^2+2\right)a+4\left(x^3+1\right)=0.$$

$$a_{1,2}=\frac{2x^2+1\pm\sqrt{4x^4+4x^2+1-4\left(x^3+1\right)x}}{x}=\frac{2x^2+1\pm\sqrt{4x^2-4x+1}}{x}=$$

$$=\frac{2x^2+1\pm\sqrt{(2x-1)^2}}{x}=\frac{2x^2+1\pm(2x-1)}{x}.$$

Данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} a=\dfrac{2x^2+2x}{x} \\ a=\dfrac{2x^2-2x+2}{x} \end{array}\right., \text{ т.е, } \left[\begin{array}{l} a=2x+2 \\ 2x^2-(2+a)x+2=0 \end{array}\right..$$

При преобразованиях важно помнить, что сокращение на x в первом уравнении и умножение на x обеих частей второго уравнения не нарушает их равносильности, поскольку $x\neq 0$. Возвращаемся к подстановке $\sqrt{5}=a$ и решаем полученные уравнения относительно неизвестной x:

$$\left[\begin{array}{l} 2x+2-\sqrt{5}=0 \\ 2x^2-\left(2+\sqrt{5}\right)x+2=0 \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{\sqrt{5}-2}{2} \\ x_{2,3}=\dfrac{2+\sqrt{5}\pm\sqrt{4\sqrt{5}-7}}{4} \end{array}\right..$$

Отв.: $x_1=\dfrac{\sqrt{5}-2}{2}$; $x_{2,3}=\dfrac{2+\sqrt{5}\pm\sqrt{4\sqrt{5}-7}}{4}$.

§1.8. Метод неопределенных коэффициентов

Существует еще один, достаточно общий способ разложения многочленов на сомножители – *метод неопределенных коэффициентов*. Суть этого метода состоит в том, что вид сомножителей, на которые разлагается данный многочлен, угадывается, а коэффициенты этих сомножителей (также многочленов) определятся путём перемножения сомножителей и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях переменной.

Теоретической основой метода являются следующие утверждения:

1. Два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях x. Так, если выполняется равенство

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n,$$

то из него вытекают следующие соотношения между коэффициентами

$$a_0 = b_0;\ a_1 = b_1;\ \ldots;\ a_{n-1} = b_{n-1};\ a_n = b_n.$$

2. Любой многочлен третьей степени имеет хотя бы один действительный корень, а потому разлагается в произведение линейного и квадратичного сомножителя.

3. Любой многочлен четвёртой степени разлагается в произведение многочленов второй степени.

Пусть известно, что в результате некоторых преобразований образуется многочлен, коэффициенты которого неизвестны. Эти коэффициенты нужно обозначить буквами и считать их неизвестными. Далее для определения этих неизвестных составляется система уравнений. Поясним алгоритм метода на примерах.

Пример 1.21. Решить уравнение

$$3x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Решение. Поскольку многочлен третьей степени разлагается в произведение линейного и квадратичного сомножителей, то будем искать многочлены $x - p$ и $ax^2 + bx + c$ такие, что справедливо равенство

$$3x^3 - x^2 - 3x + 1 = (x - p)(ax^2 + bx + c)$$

Раскрывая скобки и группируя слагаемые с одинаковыми степенями x, получим

$$3x^3 - x^2 - 3x + 1 = ax^3 + (b - ap)x^2 + (c - bp)x - pc.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях этого равенства, получаем систему четырёх уравнений для определения четырёх неизвестных коэффициентов:

$$\begin{cases} 3 = a \\ -1 = b - ap \\ -3 = c - bp \\ 1 = -pc \end{cases}$$

Выражаем все неизвестные системы через параметр b. Имеем

$$a = 3; \ \ p = \frac{b+1}{3}; \ \ c = \frac{b^2 + b - 9}{3}.$$

Теперь из четвертого уравнения системы после некоторых преобразований получаем уравнение для определения b

$$b(b^2 + 2b - 8) = 0.$$

Это уравнение имеет три корня: $b_1 = 0; \ b_2 = 2; \ b_3 = -4$, однако, легко проверить, что в каждом из этих трех случаев будем иметь после нахождения параметров p и c одно и то же разложение левой части уравнения:

$$(x+1)(3x-1)(x-1) = 0.$$

Ответ: $x_1 = -1; \ x_2 = \dfrac{1}{3}; \ x_3 = 1.$

Легко заметить, что рассмотренный пример гораздо легче решать при помощи теоремы Безу, подбирая, например, корень $x = 1$ и производя процедуру деления. Еще проще сгруппировать первое слагаемое исходного уравнения со вторым и третье с четвертым:

$$x^2(3x-1) - (3x-1) = 0 \Rightarrow (3x-1)\cdot(x^2 - 1) = 0.$$

В следующем примере приходится столкнуться с гораздо большими техническими трудностями.

Пример 1.22. Решить уравнение

$$x^3-\left(\sqrt{2}-1\right)x^2-\left(3+\sqrt{2}\right)x+3\sqrt{2}=0.$$

Решение. Поступая аналогично решению предыдущему примера, в конечном итоге придем к системе

$$\begin{cases}1=a\\ 1-\sqrt{2}=b-ap\\ -3-\sqrt{2}=c-bp\\ 3\sqrt{2}=-pc\end{cases}.$$

Выражаем параметры p и c через b. В результате после некоторых преобразований приходим к разрешающему кубическому уравнению относительно параметра b.

$$b^3+2\left(\sqrt{2}-1\right)b^2-\sqrt{2}b+\sqrt{2}+1=0.$$

Подбором подбираем корень этого уравнения $b=1$. После деления «уголком» приходим к разложению левой части на сомножители:

$$(b-1)\left(b^2+\left(2\sqrt{2}-1\right)b-\left(\sqrt{2}-1\right)\right)=0.$$

Таким образом, имеем три возможных значения параметра b: $b_1=1$; $b_{2,3}=\dfrac{1-2\sqrt{2}\pm\sqrt{13}}{2}$, однако, после нахождения параметров p и c, приходим к одному и тому же разложению левой части исходного уравнения, которое можно теперь записать в виде

$$\left(x^2+x-3\right)\left(x-\sqrt{2}\right)=0.$$

Ответ: $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$; $x_3=\sqrt{2}$.

Отметим, что решение кубических уравнений методом неопределенных коэффициентов в общем случае сводится к решению также кубического уравнения относительно одного из параметров разложения. Естественно, если мы не сможем подобрать корень этого уравнения (в предыдущем примере, например, $b=1$), то метод неопределенных коэффициентов не приведет к цели. Поэтому чаще всего этот метод применяется при решении примеров следующей структуры.

Пример 1.23. При каких значениях a и b многочлен $x^4-x^3-9x^2+ax-10$ делится без остатка на трехчлен x^2+2x+b?

Решение. Представим многочлен четвертого порядка в виде произведения двух квадратных трехчленов:

$$x^4-x^3-9x^2+ax-10=\left(x^2+2x+b\right)\left(x^2+px+q\right)$$

Раскрываем скобки в правой части написанного равенства и группируем слагаемые с одинаковыми степенями x. После некоторых преобразований получим:

$$x^4-x^3-9x^2+ax-10=x^4+(p+2)x^3+(q+2p+b)x^2+(2q+bp)x+bq.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x и свободные члены, получаем систему

$$\begin{cases} p+2=-1 \\ q+2p+b=-9 \\ 2q+bp=a \\ bq=-10 \end{cases}.$$

Решение этой системы не представляет особых трудностей. Выражаем из первого уравнения $p=-3$. После этого из второго уравнения имеем связь между q и b: $q=-3-b$, что после подстановки в четвертое уравнение системы приведет к квадратному уравнению относительно b:

$$b^2+3b-10=0.$$

Корни этого уравнения $b_1=-5;\ b_2=2$ позволяют из третьего уравнения системы найти параметр a.

Ответ: $a_1=19;\ b_1=-5$ или $a_2=-16;\ b_2=2$.

§1.9. Применение общих формул и методов решения рациональных уравнений 3-й и 4-й степени.

Переходим к обзору наиболее общих методов решения целых алгебраических уравнений, большинство которых выходит за рамки школьной программы. Начнем с т.н. «замечательного тождества», или, как его еще называют, формулы разложения суммы трех кубов. Она имеет следующий вид

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\cdot\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right) \quad (1.17)$$

Приведем доказательство этого равенства, поскольку оно методически полезно. Разложим левую часть формулы (1.17) на множители так, чтобы выделить сомножитель $a+b+c$, входящий в правую часть. Воспользовавшись известными разложениями кубических выражений (формулы (1.7),(1.8),(1.12)), имеем

$$\begin{aligned}
&a^3+b^3+c^3-3abc=\left(a^3+3ab(a+b)+b^3\right)-3ab(a+b)+c^3-3abc=\\
&=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc=\left((a+b)^3+c^3\right)-3ab(a+b)-3abc=\\
&=(a+b+c)\left((a+b)^2-(a+b)c+c^2\right)-3ab(a+b+c)=\\
&=(a+b+c)\left(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab\right)=\\
&=(a+b+c)\cdot\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right).
\end{aligned}$$

Формула (1.17) доказана. Заметим, что «замечательное тождество» может иметь различные применения в элементарной математике. В частности при решении приведенных кубических уравнений вида $x^3+qx+r=0$, при выяснении вопросов о равносильности уравнений, содержащих кубические радикалы и т.д.

Пример 1.24. Решить уравнение

$$2x^3-6x+5=0.$$

Решение. Данное уравнение рациональных корней не имеет, в чем можно убедиться, проверив условия теоремы 2. Попытки выделения полного куба суммы или разности двух выражений займут много времени и также к цели не приведут. Попробуем применить формулу (1.17). С этой целью представим левую часть уравнения в виде левой части формулы (1.17):

$$x^3-3x+\frac{5}{2}=0\Rightarrow x^3+2+\frac{1}{2}-3\cdot 2\cdot\frac{1}{2}x=0\Rightarrow$$

$$x^3+\left(\sqrt[3]{2}\right)^3+\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^3-3x\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=0$$

Цель достигнута. Теперь можно применить «замечательное тождество» и разложить левую часть уравнения на множители. Имеем

$$\left(x+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(x^2+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{\frac{1}{4}}-\sqrt[3]{2}\cdot x-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\cdot x-1\right)=0\ \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x+\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)=0 \\ x^2-\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)\cdot x+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{\frac{1}{4}}-1=0 \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности дает корень $x=-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, а второе представляет собой квадратное уравнение, которое не имеет действительных решений. Для доказательства этого утверждения вычислим его дискриминант:

$$D=\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^2-4\cdot\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{\frac{1}{4}}-1\right)=-3\cdot\sqrt[3]{4}-3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}}+6=3\cdot\left(2-\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)$$

Рассмотрим выражение в скобках и убедимся, что оно отрицательно, т.е. докажем неравенство

$$2<\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{\frac{1}{4}}.$$

Поскольку обе части неравенства положительны, возведем их в квадрат:

$$4 < \sqrt[3]{16} + 2 + \sqrt[3]{\frac{1}{16}}, \text{ т.е., } 2 < \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{\frac{1}{16}}.$$

Заключительное неравенство является очевидным, поскольку $2 = \sqrt[4]{16} < \sqrt[3]{16}$. Производя все действия в обратном порядке, приходим к доказательству исходного неравенства.

Ответ: $x = -\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

В общем случае кубическое уравнение

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

подстановкой $x = y - \frac{a}{3}$ приводится к неполному виду

$$y^3 + py + q = 0, \tag{1.18}$$

где $p = -\frac{a^3}{3} + b$, $q = 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c$.

Уравнение (1.18) имеет или один действительный и два сопряженных комплексных корня (их определение не рассматривается в школьном курсе математики), или три действительных корня, по крайней мере, два из которых равны, или три различных действительных корня в зависимости от того, будет ли выражение

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$$

соответственно положительно, равно нулю или отрицательно.

В первом случае ($Q > 0$) единственный действительный корень уравнения (1.18) находится по формуле Кардано

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}.$$

Во втором случае ($Q = 0$) кроме выписанного корня имеем еще два одинаковых действительных корня

$$y_{2,3} = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

Если же кубическое уравнение имеет три действительных корня, то они всегда могут быть выражены через тригонометрические функции. Действительно, сделаем в приведенном уравнении $x^3 + px + q = 0$ замену $x = ky$. При этом коэффициент k подберем так, чтобы отношение коэффициентов при y^3 и y в полученном в результате этой замены уравнении было бы равно $-\frac{4}{3}$. Таким образом, в уравнении

$$k^3 y^3 + kpy + q = 0$$

потребуем, чтобы $\frac{k^3}{kp} = \frac{k^2}{p} = -\frac{4}{3}$, так что $k^2 = -\frac{4p}{3}$. Следовательно, уравнение преобразуется к виду

$$k \cdot \left(-\frac{4p}{3} y^3 + py \right) + q = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{kp}{3}\left(4y^3 - 3y\right) = q.$$

Теперь после замены $y = \cos t$ получим уравнение

$$\frac{kp}{3}\left(4\cos^3 t - 3\cos t\right) = q.$$

После использования тригонометрической формулы для синуса тройного угла это уравнение перепишется в виде

$$\cos 3t = \frac{3q}{kp}.$$

Полученное тригонометрическое уравнение имеет решение, если $\left|\frac{3q}{kp}\right| \le 1$. Учитывая неотрицательность обеих частей этого неравенства, после возведения в квадрат, получим условие

$$9q^2 \le k^2 p^2 = -\frac{4}{3} p^3.$$

Таким образом, имеем условие $9q^2 + \frac{4}{3} p^3 \le 0$, что после деления на 36 приведет к знакомому ограничению $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \le 0$, т.е. $Q \le 0$. Это неравенство, как было указано выше, имеет место как раз тогда, когда исходное уравнение имеет три действительных корня. Приведем окончательный ответ

$$x=\sqrt{-\frac{4p}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{3\sqrt{3q}}{2\sqrt{-p^3}}+\frac{2\pi n}{3}\right), \qquad n=0,1,2.$$

Формулы Кардано можно вывести и иначе. Проиллюстрируем этот способ на примере.

Пример 1.25. Решить уравнение

$$6x^3-18x=13.$$

Решение. В том случае, когда не подходят вышеприведенные способы решения, целесообразно попробовать провести замену

$$x=y+t.$$

Тогда уравнение примет вид

$$(y+t)^3-3(y+t)=\frac{13}{6},$$

Возводим в куб и приводим уравнение к виду

$$y^3+t^3+3ty(y+t)-3(y+t)=\frac{13}{6}.$$

Поскольку вместо одной переменной введено две, то одну из них можно выбрать произвольно. В нашем случае имеется возможность выбрать значения y и t так, чтобы выполнялось соотношение $yt=1$. Тогда имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} ty=1 \\ t^3+y^3=\dfrac{13}{6}\cdot \end{cases}$$

Решение этой системы труда не представляет. Оно имеет вид

$$\begin{cases} ty=1 \\ y_1^3=\dfrac{3}{2};\ y_2^3=\dfrac{2}{3}\cdot \end{cases}$$

Окончательно имеем $y_1 = \sqrt[3]{\frac{3}{2}};\ t_1 = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ или $y_2 = \sqrt[3]{\frac{2}{3}};\ t_2 = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

Возвращаемся к исходной переменной:

$$x = y + t = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$$

Ответ.: $x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

§1.10. Простейшие замены переменной

Одним из самых важных методов решения уравнений и неравенств является метод замены переменной. В результате его применения можно упростить исходное уравнение, приведя его к стандартному типу и затем легко его решить.

Предполагается обозначение новой переменной некоторого повторяющегося выражения. Самое трудное при решении уравнений догадаться, какое выражение заменить новой переменной. Но для некоторых видов уравнений подстановки всегда одни и те же. Рассмотрим некоторые из этих уравнений.

В несложных задачах увидеть замену переменной достаточно легко. Чаще всего за новую неизвестную принимается либо квадратный трехчлен, либо дробно-рациональная функция от старой переменной.

Пример 1.26. Решить уравнение

$$(8x+7)^2(4x+3)(x+1) = \frac{9}{2}.$$

Решение. Уравнение существует при всех действительных значениях неизвестной: $x \in R$. После раскрытия скобок имеем уравнение в виде

$$\left(64x^2 + 112x + 49\right)\cdot\left(4x^2 + 7x + 3\right) = \frac{9}{2}.$$

Теперь нужно заметить, что коэффициенты при x^2 и x в обеих скобках пропорциональны. Это дает возможность ввести переменную

$$4x^2+7x+3=y.$$

Преобразуем все остальные выражения, входящие в уравнение, через новую переменную. Последовательно находим:

$$64x^2+112x+48=16y,$$

$$64x^2+112x+49=16y+1.$$

Теперь уравнение примет вид квадратного уравнения относительно новой переменной y:

$$(16y+1)y=\frac{9}{2}.$$

Его решение труда не представляет:

$$16y^2+y-\frac{9}{2}=0 \;\Rightarrow\; 32y^2+2y-9=0 \;\Rightarrow$$

$$y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+32\cdot 9}}{32}=\frac{-1\pm 17}{32} \;\Rightarrow$$

$$y_1=-\frac{9}{16};\quad y_2=\frac{1}{2}.$$

Возвращаемся к старой переменной:

$$\left[\begin{array}{l} 4x^2+7x+3=-\dfrac{9}{16} \\ 4x^2+7x+3=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2+7x+\dfrac{57}{16}=0 \\ 4x^2+7x+\dfrac{5}{2}=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\varnothing\ \ (D<0) \\ x_1=-\dfrac{5}{4};\ x_2=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=-\frac{5}{4};\ x_2=-\frac{1}{2}$

Пример 1.27. Решить уравнение

$$\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0.$$

Решение.

Определим область допустимых значений переменной x:

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ x^2 + x - 5 \neq 0. \\ x \in R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \dfrac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} \\ x \in R \end{cases}$$

Обозначим $\dfrac{x^2 + x - 5}{x} = t,$ тогда исходное уравнение примет вид: $t + \dfrac{3}{t} + 4 = 0, t \neq 0$ (следует из вышеопределенной области допустимых значений). Корни полученного уравнения: $t_1 = -3, t_2 = -1.$ Возвращаясь к исходной переменной, получим ответ:

$$\frac{x^2 + x - 5}{x} = -3 \Rightarrow x_1 = -5, x_2 = 1,$$

$$\frac{x^2 + x - 5}{x} = -1 \Rightarrow x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{6}.$$

Ответ: $x_1 = -5, x_2 = 1, x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{6}.$

§1.11. Дробно-рациональная замена переменной

Основным «внешним» признаком необходимости применения дробно-рациональной замены переменной является тот факт, что в уравнении присутствуют квадратные трехчлены, у которых коэффициенты при x^2 и свободные члены равны (или пропорциональны).

Пример 1.28. Решить уравнение

$$(x+6)(x+3)(x-1)(x-2) = 12x^2.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$(x+6)(x-1) \cdot (x+3)(x-2) = 12x^2.$$

Раскроем скобки в левой части:

$$(x^2 + 5x - 6)(x^2 + x - 6) = 12x^2.$$

Разделим обе части уравнения на $x^2 \neq 0$ (можно путем подстановки проверить, что значение x=0 не является корнем уравнения). Тогда уравнение примет вид:

$$\left(x+5-\frac{6}{x}\right)\left(x+1-\frac{6}{x}\right)=12.$$

Вводим новую переменную: $t = x+1-\dfrac{6}{x}.$ Получаем квадратное уравнение относительно t и решаем его:

$$t(t+4)=12,$$
$$t^2+4t-12=0,$$
$$t_1=-6, t_2=2.$$

В терминах исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} x+1-\dfrac{6}{x}=-6 \\ x+1-\dfrac{6}{x}=2, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+7x-6=0 \\ x^2-x-6=0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{73}}{2} \\ x_3=-2, x_4=3. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{73}}{2}, x_3=-2, x_4=3.$

§1.12. Возвратно-симметрические уравнения

Алгебраическое уравнение четвертой степени вида

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 \tag{1.19}$$

при $e \neq 0$ называется возвратно-симметрическим, если коэффициенты уравнения, a,b,d,e связаны соотношениями

$$\frac{a}{e}=\left(\frac{b}{d}\right)^2,$$

или иначе

$$d = \lambda b, \qquad e = \lambda^2 a.$$

Здесь λ – некоторое отличное от нуля число.

Используя эту связь между коэффициентами, уравнение (1.19) можно записать в виде

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + \lambda bx + \lambda^2 a = 0 \tag{1.20}$$

Так как $x = 0$ не является корнем уравнения (1.19), то, разделив почленно обе части уравнения (1.20) на x^2 и проведя соответствующую группировку членов левой части уравнения, получим уравнение, эквивалентное уравнению (1.20) .

$$a\left(x^2 + \frac{\lambda^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{\lambda}{x}\right) + c = 0$$

Вводим новую переменную по формуле

$$x + \frac{\lambda}{x} = y \tag{1.21}$$

Для того, чтобы записать уравнение в терминах новой переменной y, необходимо выразить через y выражение $x^2 + \frac{\lambda^2}{x^2}$. С этой целью возводим обе части формулы (1.21) в квадрат:

$$x^2 + 2x\frac{\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^2} = y^2.$$

Таким образом,

$$x^2 + \frac{\lambda^2}{x^2} = y^2 - 2\lambda,$$

и уравнение перепишется в виде квадратного уравнения относительно y:

$$a\left(y^2 - 2\lambda\right) + by + c = 0 \tag{1.22}$$

Решая уравнение (1.22), и возвращаясь по формуле (1.21) к исходной переменной, получаем ответ.

Следует отметить, что возведение в квадрат обеих частей выражения (1.21) может привести к появлению посторонних корней, поскольку переменная y может быть любого знака. Поэтому перед формулировкой ответа необходимо сделать проверку полученных значений x.

Частным случаем возвратно-симметрического уравнения является симметрическое уравнение, соответствующее значению $\lambda = 1$ и кососимметрическое, соответствующее значению $\lambda = -1$.

Заменой $x + \dfrac{1}{x} = y$ для симметрического и $x - \dfrac{1}{x} = y$ для кососимметрического уравнений эти уравнения вводятся к квадратным уравнениям относительно неизвестной y.

Пример 1.29. Решить уравнение

$$4x^4 - 16x^3 + 7x^2 - 32x + 16 = 0.$$

Решение. ОДЗ: $x \in R$.

Для нашего уравнения коэффициенты a, b, c, d, e принимают значения $a = 4$, $b = -16$, $c = 7$, $d = -32$, $e = 16$. Таким образом,

$$\frac{a}{e} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}, \ \left(\frac{b}{d}\right)^2 = \left(\frac{-16}{-32}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Соотношение $\dfrac{a}{e} = \left(\dfrac{b}{d}\right)^2$ выполняется, т.е., уравнение является возвратно-симметрическим. Подстановкой убеждаемся, что значение $x = 0$ не является корнем, поэтому можно обе части исходного уравнения разделить на x^2 и записать уравнение в виде

$$4\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 16\left(x + \frac{2}{x}\right) + 7 = 0.$$

Вводим новую переменную $x + \dfrac{2}{x} = y$. Тогда $x^2 + 2 \cdot x \cdot \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x^2} = y^2$, откуда $x^2 + \dfrac{4}{x^2} = y^2 - 4$. Подставляем эти соотношения в выписанное уравнение:

$$4\left(y^2-4\right)+16y+7=0, \text{ или } 4y^2-16y-9=0.$$

Корни полученного квадратного уравнения $y_1=\dfrac{9}{2}$, $y_2=-\dfrac{1}{2}$. Возвращаемся к исходной переменной и решаем совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{2}{x}=\dfrac{9}{2} \\ x+\dfrac{2}{x}=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-9x+4=0 \\ 2x^2+x+4=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=4; x_2=\dfrac{1}{2}. \\ x\in\varnothing\,(D<0) \end{array}\right.$$

Проверкой убеждаемся, что полученные значения корней удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $x_1=4; x_2=\dfrac{1}{2}$.

К обратно-симметрическим уравнениям шестой степени относят уравнения вида

$$ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+ex^2+fx+j=0, \qquad (1.23)$$

в которых выполняются следующие соотношения между коэффициентами:

$$\left(\frac{a}{j}\right)^2=\left(\frac{b}{f}\right)^3=\left(\frac{c}{e}\right)^6.$$

В этом случае, если $j\neq 0$, нужно разделить все уравнение (1.23) на x^3и ввести переменную $\dfrac{c}{e}x+\dfrac{1}{x}=y$.

Пример 1.30. Решить уравнение

$$x^7-2x^6+3x^5-x^4-x^3+3x^2-2x+1=0.$$

Решение. Подбираем корень $x=-1$. Разделим многочлен в левой части уравнения на (x–1).Получим:

$$(x-1)\cdot\left(x^6-3x^5+6x^4-7x^3+6x^2-3x+1\right)=0$$

Имеем уравнение

$$x^6-3x^5+6x^4-7x^3+6x^2-3x+1=0.$$

Разделим обе части уравнения на x^3 и объединим первый член с последним, второй с предпоследним и т.д.

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-3\cdot\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)-7=0.$$

Вводим новую переменную:

$$x+\frac{1}{x}=y.$$

Тогда

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2;\ x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2;$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+3x^2\cdot\frac{1}{x}+3x\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=x^3+3\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^3}=y^3;$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y$$

Таким образом, в терминах новой переменной имеем уравнение

$$y^3-3y-3\cdot\left(y^2-2\right)+6y-7=0;$$

$$y^3-3y^2+3y-1=0;$$

$$\left(y-1\right)^3=0\Rightarrow y=1.$$

Возвращаемся к исходной переменной:

$$x+\frac{1}{x}=1\Rightarrow x^2-x+1=0\Rightarrow x\in\varnothing\left(D<0\right).$$

Данное уравнение имеем только один корень $x=-1$.

Ответ: $x=-1$.

§1.13. Однородные алгебраические уравнения

Уравнения 2го порядка данного типа можно представить в виде:

$$au^{2\alpha}+bu^{\alpha}v^{\alpha}+cv^{2\alpha}=0,$$

где a, b, c, α – заданные (отличные от нуля) числа, $u=u(x), v=v(x)$ – некоторые функции от x. Для решения уравнения необходимо разделить обе части уравнения на $v^{2\alpha}\neq 0$ и получить уравнение вида,

$$a\left(\frac{u}{v}\right)^{2\alpha}+b\left(\frac{u}{v}\right)^{\alpha}+c=0,$$

которое является квадратным уравнением относительно новой переменной $t=\left(\frac{u}{v}\right)^{\alpha}$.

Пример 1.31. Решить уравнение

$$(2x^2-x+1)^2+x^2(2x^2-x+1)-6x^4=0.$$

Решение.

Делим обе части уравнения на $x^4\neq 0$ (можно проверить путем подстановки). Получаем:

$$\left(\frac{2x^2-x+1}{x^2}\right)^2+\frac{2x^2-x+1}{x^2}-6=0.$$

Обозначаем: $t=\frac{2x^2-x+1}{x^2}$. Тогда уравнение принимает вид:

$$t^2+t-6=0\Rightarrow t_1=-3, t_2=2.$$

Получаем:

$$\frac{2x^2-x+1}{x^2}=-3\Rightarrow \textit{нет корней}\,(D<0),$$
$$\frac{2x^2-x+1}{x^2}=2\Rightarrow x_1=1.$$

Ответ: $x=1.$

Пример 1.32. Решить уравнение

$$(x-3)^2\cdot(x+2)^2-(x-3)\cdot\left(x^2-4\right)-2(x-2)^2=0.$$

Решение.

Здесь $u(x)=(x-3)\cdot(x+2)$; $v(x)=x-2.$

Проверяем, что $x=2$ не является корнем уравнения и делим обе чести уравнения на $(x-2)^2$:

$$\frac{(x-3)^2\cdot(x+2)^2}{(x-2)^2}-\frac{(x-3)\cdot(x+2)\cdot(x-2)}{(x-2)^2}-2=0;$$

$$\frac{(x-3)^2\cdot(x+2)^2}{(x-2)^2}-\frac{(x-3)\cdot(x+2)}{(x-2)}-2=0.$$

Вводим новую переменную

$$z=\frac{(x-3)\cdot(x+2)}{(x-2)},$$

для которой получаем уравнение $z^2-z-2=0$. Его корни $z_1=-1;\ z_2=2.$

Таким образом для определения исходного неизвестного x имеем совокупность уравнений

$$\left[\begin{aligned}&\frac{(x-3)\cdot(x+2)}{(x-2)}=-1\\&\frac{(x-3)\cdot(x+2)}{(x-2)}=2\end{aligned}\right.\Rightarrow\left[\begin{aligned}&x^2-x-6=2-x\\&x^2-x-6=2x-4\end{aligned}\right.\Rightarrow\left[\begin{aligned}&x^2-x-6=2-x\\&x^2-x-6=2x-4\end{aligned}\right.\Rightarrow$$

$$\left[\begin{aligned}&x^2=8\\&x^2-3x-2=0\end{aligned}\right.\Rightarrow\left[\begin{aligned}&x_1=2\sqrt{2};\ x_2=-2\sqrt{2};\\&x_{3,4}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}.\end{aligned}\right.$$

Ответ: $\pm2\sqrt{2};\ \dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}.$

§1.14. Метод дополнения до полного квадрата

В основе решения уравнений такого типа – использование формул:

$$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab \text{ и } a^2+b^2=(a+b)^2-2ab.$$

Главная идея в стандартных уравнениях, решаемых этим методом, состоит в том, что левая часть уравнения дополняется до полного квадрата недостающим удвоенным произведением, которое восстанавливается по виду присутствующих квадратов слагаемых. Указанное удвоенное произведение мы должны поместить и в правую часть уравнения, в связи с чем всё уравнение преобразуется к новому виду, который содержит новую неизвестную.

Пример 1.33. Решить уравнение $x^2 + \dfrac{9x^2}{(x+3)^2} = 7.$

Решение. Определим область допустимых значений переменной x: $x \neq -3$.

Используя упомянутую в этом подразделе формулу, получаем:

$$\left(x - \frac{3x}{x+3}\right)^2 + 2x\frac{3x}{x+3} - 7 = 0,$$

$$\left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2 + 6\frac{x^2}{x+3} - 7 = 0.$$

Обозначим: $t = \dfrac{x^2}{x+3}$. Тогда имеем квадратное уравнение:

$$t^2 + 6t - 7 = 0 \Rightarrow t_1 = -7, t_2 = 1.$$

Таким образом:

$$\frac{x^2}{x+3} = -7, x^2 + 7x + 21 = 0 \Rightarrow \textit{нет корней}\, (D < 0),$$

$$\frac{x^2}{x+3} = 1, x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Ответ: $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

В более сложных уравнениях приходится прогнозировать получающийся новый вид уравнения и зачастую не ограничиваться только дополнением уравнения удвоенным произведением, а принимать во внимание возможность подобных преобразований и с квадратами слагаемых в формулах для $(a \pm b)^2$.

Пример 1.34. Решить уравнение $x^4 - 8x^3 + 64x - 57 = 0.$

Решение. Наличие слагаемого, содержащего третью степень неизвестного, позволяет воспринимать его как удвоенное произведение

$2\cdot x^2\cdot 4x$. Добавляем недостающий квадрат второго слагаемого в левую и правую части уравнения:

$$x^4-2\cdot x^2\cdot 4x+16x^2=16x^2-64x+57.$$

Дальнейшие преобразования не требуют пояснений:

$$\left(x^2-4x\right)^2-16\left(x^2-4x\right)-57=0;$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-4x=19 \\ x^2-4x=-3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2}=2\pm\sqrt{23}; \\ x_3=1;\ x_4=3. \end{array}\right.$$

Наличие двух целых корней уравнения говорит о возможности применения теоремы Безу, что увеличит время решения, но не потребует искусственных дополнений.

Ответ: $x_{1,2}=2\pm\sqrt{23};\ x_3=1;\ x_4=3.$

В следующем примере, возможно, придется допустить несколько ошибочных дополнений на пути к правильному решению, поскольку дополнять до полного квадрата нужно добавлением уже двух слагаемых, что усложняет прогнозирование возможной структуры преобразованного уравнения.

Пример 1.35. Решить уравнение $x^4-8x+63=0.$

Решение. Формирование левой части уравнения в виде $x^4+2x^2+1=\left(x^2+1\right)^2$ или в виде $x^4+4x^2+4=\left(x^2+2\right)^2$ и т.д. не приводит к цели. Реализация данной идеи приведет к цели, если мы преобразуем левую часть уравнения к виду $x^4+16x^2+64=\left(x^2+8\right)^2$, прибавив к обеим частям уравнения выражение $16x^2+1$:

$$x^4+16x^2+64=16x^2+8x+1;$$

$$\left(x^2+8\right)^2=(4x+1)^2;$$

Уравнения подобной структуры рассматривались в §1.6. Имеем:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+8=4x+1 \\ x^2+8=-4x-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+7=0 \\ x^2+4x+9=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2}=2\pm\sqrt{11} \\ x\in\varnothing\ (D<0) \end{array}\right..$$

Ответ: $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{11}$.

§1.15. Уравнения вида $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$ и $(x+a)^5 - (x+b)^5 = c$

Подстановка вида $x = t - \dfrac{a+b}{2}$ сводит эти уравнения к биквадратным. Для решения уравнений данного типа необходимо также использование следующих формул:

$$(x \pm a)^4 = x^4 \pm 4x^3a + 6x^2a^2 \pm 4xa^3 + a^4,$$
$$(x \pm a)^5 = x^5 \pm 5x^4a + 10x^3a^2 \pm 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5.$$

Пример 1.36. Решить уравнение

$$(x+3)^5 - (x-1)^5 = 64.$$

Решение. Производим замену $x = t - \dfrac{3-1}{2} = t - 1.$ Получаем уравнение вида:

$$(t-1+3)^5 - (t-1-1)^5 = 64,$$
$$(t+2)^5 - (t-2)^5 = 64,$$
$$t^5 + 10t^4 + 40t^3 + 80t^2 + 80t + 32 - (t^5 - 10t^4 + 40t^3 - 80t^2 + 80t - 32) = 0,$$
$$20t^4 + 160t^2 = 0,$$
$$20t^2(t^2 + 8) = 0,$$
$$20t^2 = 0, t = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -1,$$
$$t^2 + 8 = 0 \Rightarrow \textit{решений нет}\,(t^2 \geq 0\ \forall t).$$

Ответ: $x_{1,2} = -1$.

Пример 1.37. Решить уравнение $(x+1)^4 + (x+5)^4 = 82.$

Решение. Пусть $x = t - 3,$ тогда исходное уравнение можно переписать как:

$$(t-2)^4+(t+2)^4=82,$$
$$t^4-8t^3+24t^2-32t+16+t^4+8t^3+24t^2+32t+16=82,$$
$$2t^4+48t^2+32=82,$$
$$t^4+24t^2-25=0 \Rightarrow t_1^2=-25, t_2^2=1,$$
$$t_2=\pm 1 \Rightarrow x_1=-4, x_2=-2.$$

Ответ: $x_1=-4, x_2=-2.$

§1.16. Метод выделения целой части

При решении примеров данным методом необходимо сначала в каждой из дробей уравнения выделить целую часть, затем произвести группировку полученных дробей.

Пример 1.38. Решить уравнение

$$\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-2}{x+3}=\frac{x-4}{x+5}-\frac{x-5}{x+6}.$$

Решение. Так как в условии присутствуют дробные выражения, то определим область допустимых значений переменной x: $x \neq -2, x \neq -3, x \neq -5, x \neq -6.$

Выделяем целую часть у каждой из дробей уравнения:

$$\frac{x+2-3}{x+2}-\frac{x+3-5}{x+3}=\frac{x+5-9}{x+5}-\frac{x+6-11}{x+6},$$
$$1-\frac{3}{x+2}-1+\frac{5}{x+3}=1-\frac{9}{x+5}-1+\frac{11}{x+6}.$$

Группируем полученные дроби:

$$\frac{5}{x+3}-\frac{11}{x+6}=\frac{3}{x+2}-\frac{9}{x+5},$$
$$\frac{5x+30-11x-33}{x^2+9x+18}=\frac{3x+15-9x-18}{x^2+7x+10},$$
$$\frac{-6x-3}{x^2+9x+18}=\frac{-6x-3}{x^2+7x+10},$$
$$\frac{2x+1}{x^2+9x+18}=\frac{2x+1}{x^2+7x+10},$$

Учитывая ограничения, приведенные выше и определяющие ОДЗ, уравнение можно переписать в виде:

$$(2x+1)(x^2+9x+18-x^2-7x-10)=0,$$
$$x_1=-0.5, x_2=-4.$$

Ответ: $x_1=-0.5, x_2=-4.$

§1.17. Использование теоремы о пределе монотонной последовательности

При решении уравнений данного типа используется теорема, доказываемая в курсе высшей математики: если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел.

Сформулированная теорема сводится к тому, что если из бесконечного числа объектов удалить конечное их число, то бесконечность останется неизменной.

Пример 1.39. Решить уравнение

$$(x^2-1)+(x^2-1)^2+(x^2-1)^3+\ldots=3.$$

Решение. Обозначим $y=(x^2-1)+(x^2-1)^2+(x^2-1)^3+\ldots=3$, и вынесем общий множитель в левой части за скобки:

$$(x^2-1)\left[1+(x^2-1)+(x^2-1)^2+(x^2-1)^3+\ldots\right]=3,$$
$$(x^2-1)\left[1+y\right]=3,$$
$$(x^2-1)\left[1+3\right]=3,$$
$$(x^2-1)=\frac{3}{4}\Rightarrow x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Ответ: $x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}.$

Отметим, что тот же ответ можно получить, рассматривая левую часть исходного уравнения как бесконечно убывающую при $\left|x^2-1\right|<1$ геометрическую прогрессию. В следующем примере это невозможно.

Пример 1.40. Решить уравнение

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}=6.$$

Решение. Данное уравнение – иррациональное (см. гл 2) но его решение хорошо иллюстрирует основной алгоритм рассматриваемого в данном параграфе метода. Определим область допустимых значений переменной *x*: $x \ge 0$.

Возведем обе части уравнения во вторую степень:

$$x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}=36,$$
$$6x=36 \Rightarrow x=6.$$

Найденный корень удовлетворяет определенной выше области допустимых значений переменной.

Ответ: $x=6$.

§1.18. Использование свойств монотонных функций

Решение уравнений с использованием свойств монотонности основывается на следующих утверждениях.

1. Если $f(x)$ – непрерывная и строго монотонная функция на промежутке *X*, то уравнение $f(x)=C$, где C – данная константа, может иметь не более одного решения на промежутке *X*.

2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные на промежутке *X* функции, причем $f(x)$ строго возрастает, а $g(x)$ строго убывает на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x)=g(x)$ может иметь не более одного решения на промежутке *X*. В качестве промежутка *X* могут быть бесконечный промежуток $(-\infty;\infty)$, промежутки $(a;\infty)$, $(-\infty;a)$, $[a;\infty)$, $(-\infty;a]$, отрезки, интервалы и полуинтервалы.

Пример 1.41. Решить уравнение

$$x^9+6x-7=0.$$

Решение. ОДЗ: $x \in R$. Перепишем уравнение в виде:

$$x^9 = 7 - 6x.$$

Функция $y = x^9$ – монотонно возрастающая, а функция $y = 7 - 6x$ – монотонно убывающая. Значит, данное уравнение имеет только один корень, который можно найти перебором: x=1.

Ответ: x=1.

Пример 1.42. Решить уравнение

$$x^5 + x^3 + 5x - 7 = 0.$$

Решение. ОДЗ: $x \in R$.

Исследование делителей свободного члена дают одно решение уравнения $x = 1$. Однако, после деления левой части на двучлен $x - 1$ получается уравнение

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 7 = 0,$$

решение которого весьма проблематично. Поэтому изберем другой путь и представим исходное уравнение в виде

$$x^5 + 5x = 7 - x^3. \qquad \text{(a)}$$

Легко заметить, что на всей числовой оси функция $f(x) = x^5 + 5x$ непрерывна и возрастает ($f'(x) = 5x^4 + 5 > 0\ \forall x \in R$, или как сумма двух возрастающих функций), а функция $g(x) = 7 - x^3$ – непрерывна и убывает ($g'(x) = -3x^2 \le 0\ \forall x \in R$).

Поэтому уравнение (а) имеет единственное решение $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

§1.19. Метод оценок

При решении задач методом оценок используется ограниченность функций, входящих в уравнения. Практическая реализация этого метода основывается на следующих фактах.

1. Если $a>0$, то $a+\dfrac{1}{a}\ge 2$ ($a+\dfrac{1}{a}=2$, только при $a=1$). Если $a<0$, то $a+\dfrac{1}{a}\le -2$ ($a+\dfrac{1}{a}=-2$, только при $a=-1$).

2. Функция $f(x)=ax^2+bx+c$ ограничена значением $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ снизу при $a>0$ и сверху при $a<0$.

3. Если $f(x)\ge 0$ и $g(x)\ge 0$, то уравнение $f(x)+g(x)=0$ равносильно системе уравнений $\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{cases}$.

4. Если $f(x)\ge m$, а $g(x)\le m$, то уравнение $f(x)=g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)=m \\ g(x)=m \end{cases}$.

5. Если $|f(x)|\ge a$, а $|g(x)|\ge b$, $a>0$, $b>0$, то уравнение $f(x)\cdot g(x)=a\cdot b$ равносильно системе $\begin{cases} |f(x)|=a \\ |g(x)|=b \end{cases}$, причем $f(x)$ и $g(x)$ одного знака.

6. Если $|f(x)|\ge a$, а $|g(x)|\le b$, $a>0$, $b>0$, то уравнение $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$ равносильно системе $\begin{cases} |f(x)|=a \\ |g(x)|=b \end{cases}$, причем $f(x)$ и $g(x)$ одного знака.

Пример 1.43. Решить уравнение

$$\left(1+x^2+x^4+x^6+x^8\right)\cdot\left(x^{10}+1\right)=10x^9.$$

Решение. ОДЗ: $x\in R$. Воспользуемся очевидными неравенствами $1+x^2+x^4+x^6+x^8\ge 1$, $x^{10}+1\ge 1$, которые выполняются для всех $x\in R$. Тогда для правой части уравнения справедлива оценка $10x^9\ge 1$, т.е. $x\ge\dfrac{1}{\sqrt[9]{10}}>0$. Итак, корни исходного уравнения должны быть положительны.

Перемножаем скобки в левой части уравнения и, используя тот факт, что значение $x=0$ не удовлетворяет уравнению, делим обе его части на $x^9 \neq 0$. Имеем:

$$x^{18}+x^{16}+x^{14}+x^{12}+x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1=10x^9,$$

$$\left(x^9+\frac{1}{x^9}\right)+\left(x^7+\frac{1}{x^7}\right)+\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)=10.$$

В силу положительности x можно утверждать, что каждая скобка не превышает двух. Тогда заключительное равенство возможно лишь тогда когда каждая скобка равна точно двум, а это будет только при $x=1$.

Ответ: $x=1$.

ГЛАВА II. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§2.1. Общие сведения

Иррациональным называется уравнение, в котором неизвестная величина содержится под знаком радикала.

Областью допустимых значений (ОДЗ) иррационального уравнения будет множество тех значений неизвестного, при которых неотрицательны одновременно все выражения, стоящие под знаками радикалов четной степени.

При решении иррациональных уравнений рекомендуется делать преобразования, приводящие к равносильным уравнениям. Если же это затруднительно, то необходимо делать проверку полученных решений, чтобы отбросить посторонние корни. В этом случае проверка является обязательным элементом решения и необходима даже в тех случаях, когда лишние корни не появились, но ход решения был таков, что они могли появиться. С другой стороны, иногда легче сделать проверку, чем обосновать то, что в ней нет необходимости. В этом случае проверка заменяет необходимое обоснование. Наконец, проверка может быть средством контроля правильности проделанных преобразований.

Следует отметить, что во многих уравнениях полезно, а иногда и необходимо, найти ОДЗ. Однако, универсального ответа на вопрос находить или не находить ОДЗ нет и быть не может. Уравнение может быть правильно решено, если в решении отсутствует даже упоминание об ОДЗ. И наоборот, верно найденная ОДЗ и последующий отбор корней по нему скорее всего приведут к ошибкам при формулировке ответа. Из последующих примеров будет видно, что большинство посторонних корней могут принадлежать ОДЗ. Кроме того, иногда задача определения ОДЗ оказывается слишком сложной и ненужной задачей. Поэтому при решении иррациональных уравнений нужно ориентироваться, прежде всего, на проверку полученных корней.

Перейдем к рассмотрению и классификации основных методов решения иррациональных уравнений.

§2.2. Учет структуры ОДЗ

В некоторых задачах не стоит сразу пытаться избавиться от радикалов в уравнении. Определение ОДЗ, возможно, позволит либо доказать что исходное уравнение корней не имеет (если ОДЗ – пустое множество), либо состоит из конечного числа точек, что позволяет без алгебраических преобразований только с помощью проверки полученных значений выписать ответ, либо, наконец, если левая часть разложена на сомножители, отбросить корни, не принадлежащие ОДЗ.

Пример 2.1. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{2x-9}{3x+1}}+\sqrt{4x-2}=\sqrt{9-x^2}+4$$

Решение. Уравнение имеет достаточно сложный вид. ОДЗ дается системой неравенств, обеспечивающих неотрицательность подкоренных выражений:

$$\begin{cases}\dfrac{2x-9}{3x+1}\geq 0\\ 4x-2\geq 0\\ 9-x^2\geq 0\end{cases}\Rightarrow\qquad\begin{cases}x\in\left(=\infty;-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left[\dfrac{9}{2};\infty\right)\\ x\in\left[\dfrac{1}{2};\infty\right)\\ x\in[-3;3]\end{cases}$$

Поскольку данная система неравенств противоречива, ОДЗ уравнения является пустым множеством. Таким образом, нет значений неизвестного, при которых исходное уравнение существует.

Ответ: $x\in\varnothing$.

Пример 2.2. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{x+1}{5x-30}}+\sqrt{4-3x^2}=\sqrt{\frac{2x+2}{x+5}}+1$$

Решение. ОДЗ данного уравнения находится из системы

$$\begin{cases}\dfrac{x+1}{5x-30}\geq 0\\ 4-3x^2\geq 0\\ \dfrac{2x+2}{x+5}\geq 0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x\in(-\infty;-1]\cup(6;\infty)\\ x\in\left[-\dfrac{2}{\sqrt{3}};\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right]\\ x\in(-\infty;-5)\cup[-1;\infty)\end{cases}\quad\Rightarrow\quad x=-1.$$

Поскольку $x=-1$ – единственное допустимое значение, достаточно проверить, является ли оно решением уравнения. Подставив значение $x=-1$ в уравнение, убеждаемся, что оно обращается в числовое тождество $1\equiv 1$. Следовательно, $x=-1$ естоь единственное решение этого уравнения.

Ответ: $x=-1$.

Пример 2.3. Решить уравнение

$$\sqrt{9-x^2}\left(x^2-8x+15\right)(x+4)=0$$

Решение. ОДЗ данного уравнения дается неравенством $9-x^2\geq 0$. Решая это неравенство, находим, что $-3\leq x\leq 3$.

Решение исходного уравнения дается решениями совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l}9-x^2=0\\ x^2-8x+15=0\\ x+4=0\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{l}x=\pm 3\\ x=3;\ x=5,\\ x=-4\end{array}\right.$$

которые принадлежат ОДЗ. Легко определить, что корни этой совокупности $x_{1,2}=\pm 3$ принадлежат отрезку $[-3;3]$, корни $x_3=5$ и $x_4=-4$ выходят за его границы, т.е., являются посторонними корнями.

Ответ: $x_{1,2}=\pm 3$.

§2.3. Возведение уравнения в степень

Решение иррациональных уравнений, естественно, состоит в сведении их к соответствующим рациональным алгебраическим уравнениям, которые являются следствиями данных иррациональных уравнений. Метод возведения в степень является наиболее часто употребляемым при решении иррациональных уравнений. Он состоит в возведении обеих частей уравнения в некоторую степень и последующим освобождении от радикалов по формуле

$$\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^n = f(x). \tag{2.1}$$

Отметим, что возведение обеих частей уравнения в степень и преобразование радикалов никогда не влекут потери корней, но могут привести к появлению лишних корней. Чтобы этого не случилось, если проверка корней затруднительна, необходимо перед операцией возведения в степень проверять выполнение следующей теоремы.

Теорема 1. Если обе части иррационального уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень и освободиться от радикалов, то получится уравнение, равносильное исходному. Если обе части иррационального уравнения неотрицательны для всех значений переменного из ОДЗ, то при возведении обеих частей уравнения в четную степень, получится уравнение, равносильное исходному на множестве ОДЗ.

Пример 2.4. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{5x+27} = x+3$$

Решение. ОДЗ данного уравнения является вся числовая ось: $x \in R$. Возводя обе части уравнения в куб (нечетная степень!) и применяя формулу (2.1) при $n = 3$ получим равносильное уравнение

$$5x+27 = x^3+9x^2+27x+27,$$

$$x^3+9x^2+22x = 0.$$

Используем тот факт, что в данном уравнении нет свободного члена, что позволяет разложить его на сомножители

$$x\cdot(x^2+9x+22)=0$$

Отсюда следует совокупность

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+9x+22=0 \end{array}\right.$$

Учитываем, что второе уравнение совокупности не имеет действительных корней (его дискриминант отрицателен) и приходим к выводу, что данное уравнение имеет единственный корень $x=0$.

При данном способе решения проверка корня не является обязательной, поскольку все преобразования не нарушали равносильность уравнений. Однако, учитывая элементарность проверки, чтобы удостовериться в правильности выкладок, «для себя» ее лучше сделать.

Ответ: $x=0$.

Пример 2.5. Решить уравнение

$$\sqrt{4+2x-x^2}=x-2.$$

Решение. Поскольку корни квадратного трехчлена, стоящего под знаком радикала, иррациональные, ОДЗ находить пока не будем, а обоснование решения проведем при помощи проверки полученных решений. Возводим обе части данного уравнения в квадрат

$$4+2x-x^2=x^2-4x+4$$

и получаем следующее квадратное уравнение

$$2x^2-6x=0,$$

корни которого будут $x_1=0$ и $x_2=3$. Проводим проверку полученных решений при помощи подстановки их в исходное уравнение. Имеем

$$x_1=0: \qquad \sqrt{4}=-2, \qquad 2\neq-2$$

$$x_2=3: \qquad \sqrt{1}=1, \qquad 1=1$$

Таим образом, делаем вывод, что корень $x_1=0$ – посторонний.

Ответ: $x = 3$.

Пример 2.6. Решить уравнение

$$\sqrt{x+7} + x - 3 = 0.$$

Решение. Вначале попробуем решить данное уравнение, как предыдущее. А именно: обоснуем решение проверкой полученных корней. Изолируем радикал в левой части

$$\sqrt{x+7} = 3 - x \qquad \text{(a)}$$

и возведем обе части полученного уравнения в квадрат

$$x + 7 = 9 - 6x + x^2.$$

Имеем квадратное уравнение для определения неизвестного x

$$x^2 - 7x + 2 = 0.$$

Его корни: $x_1 = \dfrac{7-\sqrt{41}}{2}$, $x_2 = \dfrac{7+\sqrt{41}}{2}$. Легко видеть, что проверка данных корней очень затруднительна. Поэтому для обоснования решения находим ОДЗ исходного уравнения $x \geq -7$ и определяем преобразование, могущее повлечь за собой появление посторонних корней. Таким преобразованием является возведение обеих частей уравнения (а) в квадрат. Дело в том, что правая часть уравнения (а) может принимать, как положительные, так и отрицательные значения в пределах ОДЗ. Заметим, однако, что ни одно значение x, при котором $3 - x < 0$, не может служить корнем уравнения (а), так как в этом случае неотрицательное число (радикал в левой части) оказалось бы равным отрицательному. Иначе говоря, все корни уравнения (а) должны удовлетворять неравенству $3 - x \geq 0$, что с учетом ОДЗ дает область локализации корней

$$-7 \leq x \leq 3$$

Из двух полученных корней уравнения, только корень $x_1 = \dfrac{7-\sqrt{41}}{2}$ удовлетворяет этому неравенству. Второй же корень $x_2 = \dfrac{7+\sqrt{41}}{2}$, хотя и принадлежит ОДЗ, но не удовлетворяет неравенству $3 - x \geq 0$.

Ответ: $x = \dfrac{7 - \sqrt{41}}{2}$.

Данный пример иллюстрирует тот факт, что только определение ОДЗ недостаточно для правильного отбора корней, поскольку посторонние корни зачастую принадлежат ОДЗ. Необходимым является удовлетворение требований сформулированной выше теоремы 1 о возможности возведения обеих частей иррационального уравнения в четную степень. Более того, для уравнений вида

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \qquad (2.2)$$

вообще не имеет смысла искать ОДЗ и требовать выполнения неравенства $f(x) \geq 0$, а достаточно записать только условие отбора корней $g(x) \geq 0$. Действительно, при выполнении условия $g(x) \geq 0$ обе части уравнения (2.2) неотрицательны и условия теоремы 1 выполнены. Следовательно, обе части уравнения (2.2) можно возвести в квадрат и перейти к уравнению

$$f(x) = g^2(x).$$

Тогда за счет условия $g^2(x) \geq 0$ автоматически следует, что $f(x) \geq 0$. Поэтому даже при необоснованном возведении в квадрат посторонние корни попадают внутрь ОДЗ. Подобные рассуждения полезно запомнить и применять их при решении усложненных иррациональных уравнений и неравенств, в которых определение ОДЗ невозможно.

Обобщая вышесказанное, можно сказать, что уравнение $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$ будет равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g^{2n}(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Если в уравнение входит несколько радикалов, то однократным возведением в квадрат не обойтись. Обычно всякий раз радикал уединяется, т.е. его располагают в одной из частей уравнения, а все остальное переносится в другую часть. Кстати, при этом нет нужды каждый раз проверять неотрицательность выражения, стоящего под знаком радикала. В этом случае корнями исходного уравнения будут лишь те корни первого уравнения без радикалов, которые будут давать числа одного знака в обеих частях всех тех промежуточных уравнений, которые возводились в квадрат. Однако проводить процедуру согласования знаков обеих частей уравнения следует проводить только тогда, когда уравнение сведено к виду (2.2). До этого же добиться неотрицательности обеих частей можно простым переносом радикалов.

Пример 2.7. Решить уравнение

$$\sqrt{x+1} = 1 - \sqrt{2x+3}$$

Решение. ОДЗ уравнения:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x+3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -\dfrac{3}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x \geq -1.$$

Чтобы корректно провести операцию возведения в квадрат без получения посторонних корней перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 1$$

Теперь обе части уравнения неотрицательны и условия теоремы 1 выполнены. Возводим в квадрат левую и правую части и получаем равносильное уравнение

$$x + 1 + 2\sqrt{(2x+3)(x+1)} + 2x + 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} = -3 - 3x$$

Ставим условие согласования знаков левой и правой части уравнения, требуя, чтобы $-3-3x \geq 0$, т.е. $x \leq -1$. Это условие на неизвестную вместе с условием определяющим ОДЗ $x \geq -1$ определяют только одно возможное значение $x = -1$, которое может быть решением уравнения. Поэтому нет необходимости еще проведения повторной операции возведения в квадрат. Подставляем это значение $x = -1$ в исходное уравнение:

$$x = -1: \qquad 0 + 1 = 1 \Rightarrow 1 \equiv 1.$$

Получили верное числовое тождество.

Ответ: $x = -1$.

Пример 2.8. Решить уравнение

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{x+7}=\sqrt{x+2}-\sqrt{x+4}$$

Решение. ОДЗ данного уравнения дается системой неравенств, требующих, чтобы все подкоренные выражения были неотрицательны. Ее решение: $x \geq -2$.

Из-за наличия минусов в обеих частях данного уравнения не следует торопиться с возведением в квадрат – в результате можем получить уравнение, не равносильное исходному. Этого легко избежать – достаточно переписать исходное уравнение в виде

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}\,.$$

Здесь обе части уже неотрицательны и возведение в квадрат не приведет к появлению посторонних решений. После возведения в квадрат получим следующее уравнение, равносильное исходному на множестве ОДЗ

$$2x+7+2\sqrt{x^2+7x+12}=2x+9+2\sqrt{x^2+9x+14}$$

Приводя подобные члены опять формируем левую и правые части уравнения таким образом, чтобы выполнялись условия их неотрицательности. Тогда получим

$$\sqrt{x^2+7x+12}=\sqrt{x^2+9x+14}+1$$

Теперь по теореме 1 после возведения в квадрат опять получим равносильное уравнение. После некоторых преобразований запишем его в виде

$$2\sqrt{x^2+9x+14}=-3-2x$$

Только теперь наше уравнение сведено к виду (2.2). Требуем выполнения условия $-3-2x \geq 0$, что совместно с неравенством, определяющим ОДЗ, даст множество локализации корней $-2 \leq x \leq -\frac{3}{2}$. Еще раз возводим в квадрат и после приведения подобных членов, получим значение $x=-\frac{47}{24}$, которое удовлетворяет данному неравенству.

Ответ: $x = -\dfrac{47}{24}$.

Данное оформление решения не требует проверки полученного значения корня. Однако, при наличии времени все же можно порекомендовать абитуриенту сделать проверку, чтобы проверить проведенные выкладки и снять возможные «шероховатости» в оформлении решения. Подставляем полученный корень в исходное уравнение и получаем

$$\sqrt{\frac{25}{24}} - \sqrt{\frac{121}{24}} = \sqrt{\frac{1}{24}} - \sqrt{\frac{49}{24}}, \text{ т.е. } 5 - 11 = 1 - 7, \qquad -6 \equiv -6.$$

Проверка еще раз доказывает правильность полученного значения x.

Следует заметить, что при решении некоторых примеров удовлетворение условий теоремы 1 перед возведением в квадрат может привести к усложнению последующих уравнений. В этом случае рекомендуется переносить радикалы исходного уравнения влево-вправо таким образом, чтобы неизвестная x или более высокие ее степени $x^2, x^3, \ldots$ максимально сокращались, если это возможно. Отбор посторонних корней в этом случае может быть произведен только при помощи проверки.

Пример 2.9. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 + x - 5} + \sqrt{x^2 + 8x - 4} = 5.$$

Решение. ОДЗ определяется как решение системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + x - 5 \geq 0 \\ x^2 + 8x - 4 \geq 0. \end{cases}$$

Не будем пока решать эту систему, но запомним, что любой корень исходного уравнения должен ей удовлетворять.

Все условия теоремы 1 выполнены – можно возводить обе части уравнения в квадрат, не опасаясь появления посторонних решений. Но в данном случае эта операция нецелесообразна – в результате получим слишком сложное уравнение. Гораздо удобнее переписать исходное уравнение в виде

$$\sqrt{x^2+x-5}=5-\sqrt{x^2+8x-4} \qquad \text{(a)}$$

и обе его части возведем в квадрат. Конечно, теперь теорема 1 не применима, и это преобразование может привести к появлению посторонних корней. Поэтому необходимо будет сделать проверку. Итак, возведем обе части уравнения (a) в квадрат и получим

$$10\sqrt{x^2+8x-4}=7x+26.$$

Перед очередным возведением в квадрат отметим, что все корни полученного уравнения должны удовлетворять условию $7x+26\geq 0$, то есть $x\geq -\frac{26}{7}$. Это условие не отменит проверку, но может уменьшить ее объем. В результате после некоторых преобразований приходим к уравнению

$$51x^2+436x-1076=0,$$

откуда $x_1=2,\ x_2=-\frac{538}{51}$. Заметим, что $x_2<-\frac{26}{7}$, поэтому этот корень – посторонний. Осталось проверить значение $x_1=2$ прямой подстановкой в исходное уравнение. Имеем

$$x=2: \qquad 1+4=5.$$

Ответ: $x=2$.

Заметим, что в ходе решения нам так и не потребовалось решать систему неравенств, описывающую ОДЗ данного уравнения.

Пример 2.10. Решить уравнение

$$\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\frac{3}{x}$$

Решение. Система неравенств, определяющая ОДЗ данного уравнения, имеет вид

$$\begin{cases} x^2+x\geq 0 \\ x\neq 0 \\ x+\sqrt{x^2+x}\neq 0 \\ x-\sqrt{x^2+x}\neq 0 \end{cases}$$

Решение этой системы: $x \in (-\infty;-1] \cup (0;\infty)$.

Приводим левую часть уравнения к общему знаменателю:

$$\frac{4\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)-\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)}=\frac{3}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{3x-5\sqrt{x^2+x}}{x^2-\left(x^2+x\right)}=\frac{3}{x}$$

Поскольку знаменатель обращается в нуль при значении $x=0$, которое не входит в ОДЗ, можем от него избавиться и прийти к равносильному на ОДЗ уравнению

$$3x-5\sqrt{x^2+x}=-3, \text{ т.е., } 5\sqrt{x^2+x}=3x+3.$$

Для корректного возведения в квадрат необходимо предварительно потребовать выполнения неравенства

$$3x+3 \ge 0,$$

что с учетом ОДЗ дает область локализации корней уравнения:

$$x \in \{-1\} \cup (0;\infty).$$

Еще раз возводим в квадрат и заканчиваем решение

$$25\left(x^2+x\right)=9(x+1)^2 \Rightarrow 25x(x+1)-9(x+1)^2=0 \Rightarrow (x+1)(25x-9x-9)=0 \Rightarrow$$

$$x_1=-1;\ \ x_2=\frac{9}{16}.$$

Оба корня принадлежат найденной области локализации $x \in \{-1\} \cup (0;\infty)$.

Ответ: $x_1=-1;\ \ x_2=\frac{9}{16}$.

В задачах повышенной сложности избавление от радикалов может приводить не к квадратному уравнению, а к алгебраическому уравнению более высокой степени. В этом случае необходимо привлечение методов решения таких уравнений.

Пример 2.11. Решить уравнение

$$3x^2-2=\sqrt{24x+27}$$

Решение. Требования принадлежности решений ОДЗ и неотрицательности обеих частей уравнения приводит к условию $x\in\left[-\frac{9}{8};-\sqrt{\frac{2}{3}}\right]\cup\left[\sqrt{\frac{2}{3}};\infty\right)$. Возводим обе части уравнения в квадрат:

$$9x^4-12x^2+4=24x+27 \qquad \Rightarrow \qquad 9x^4-12x^2-24x-23=0.$$

Попытки определить рациональные корни этого уравнения к цели не приводят. После углубленного анализа левой части уравнения приходим к выводу о возможности сведения уравнения к виду $f^2(x)=g^2(x)$. С этой целью представим уравнение в виде

$$\left(9x^4-6x^2+1\right)-6x^2+3=24x+27 \quad \Rightarrow \quad 9x^4-6x^2+1=6\left(x^2+4x+4\right).$$

Цель достигнута, уравнение принимает вид

$$\left(3x^2-1\right)^2=\left(\sqrt{6}(x+2)\right)^2.$$

Остальные преобразования комментариев не требуют:

$$\left(3x^2-1\right)^2-\left(\sqrt{6}(x+2)\right)^2=0 \qquad \Rightarrow$$

$$\left(3x^2-1-\sqrt{6}(x+2)\right)\cdot\left(3x^2-1+\sqrt{6}(x+2)\right)=0.$$

Приравниваем каждый сомножитель нулю и получаем совокупность двух квадратных уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}3x^2-\sqrt{6}\cdot x-\left(1+2\sqrt{6}\right)=0\\ 3x^2+\sqrt{6}\cdot x-\left(1-2\sqrt{6}\right)=0\end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \left[\begin{array}{l}x_{1,2}=\dfrac{\sqrt{6}\pm\sqrt{18+24\sqrt{6}}}{6}\\ x\in\varnothing\ \ (D<0)\end{array}\right.$$

С учетом условия $x\in\left[-\frac{9}{8};-\sqrt{\frac{2}{3}}\right]\cup\left[\sqrt{\frac{2}{3}};\infty\right)$ необходимо оба корня поместить в ответ.

Ответ: $x=\dfrac{\sqrt{6}\pm\sqrt{18+24\sqrt{6}}}{6}$.

Пример 2.12. Решить уравнение

$$x^2-5=\sqrt{5-x}$$

Решение. Корень данного уравнения должен принадлежать множеству $x\in\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};5\right]$. Решим уравнение относительно 5, считая ее неизвестной по аналогии с x. Имеем

$$x^4-10x^2+25=5-x\Rightarrow 25-5-2\cdot 5x^2+\left(x^4+x\right)=0\Rightarrow 5^2-\left(1+2x^2\right)\cdot 5+x^4+x=0$$

$$\Rightarrow 5=\frac{2x^2+1\pm\sqrt{4x^4+4x^2+1-4\left(x^4+x\right)}}{2}=\frac{2x^2+1\pm\sqrt{(2x-1)^2}}{2}=\frac{2x^2+1\pm(2x-1)}{2}.$$

Таким образом, имеем два уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} 5=\dfrac{2x^2+1+2x-1}{2}=x^2+x \\ 5=\dfrac{2x^2+1-2x+1}{2}=x^2-x+1 \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x^2+x-5=0 \\ x^2-x-4=0 \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2} \\ x_{3,4}=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2} \end{array}\right..$$

При формулировке ответа учитываем область локализации корней уравнения $x\in\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};5\right]$.

Ответ: $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$, $x_2=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$.

Хотя метод возведения в степень является основным методом решения иррациональных уравнений, его применение зачастую может привести лишь к усложнению исходного уравнения. Таким образом, следует познакомиться с группой методов решения, которые дают иные способы избавления от радикалов.

§2.4. Введение простых дополнительных неизвестных

Введение нового неизвестного – важнейший метод решения уравнений любых видов и типов. При решении иррациональных уравнений следует ориентироваться в большом количестве разнообразных замен переменной, однако, все они преследуют по существу одну цель – избавиться от радикалов или, по крайней мере, уменьшить их количество в уравнении. Наиболее простая замена: *новая переменная – радикал от выражения, содержащего неизвестную*

Пример 2.13. Решить уравнение

$$x^2-2x+10=\sqrt{2x^2-6x+85}+x-1$$

Решение. Запишем уравнение в следующем виде

$$x^2-3x+11=\sqrt{2x^2-6x+85} \qquad \text{(а)}$$

Ключом к решению данного уравнения является констатация того факта, что коэффициенты при различных степенях x в квадратных трехчленах , стоящих в левой и правой частях уравнения (а), пропорциональны. Теперь видно, что если ввести вспомогательное неизвестное

$$y=\sqrt{2x^2-6x+85},\ y\ge 0,$$

то уравнение примет гораздо более простой вид. Действительно, выразим через новую переменную выражение в левой части уравнения. Имеем последовательно

$$2x^2-6x+85=y^2$$

$$x^2-3x+42{,}5=\frac{y^2}{2}$$

$$x^2-3x+11=\frac{y^2}{2}-31{,}5$$

Таким образом, уравнение (4) в терминах новой переменной запишется следующим образом

$$\frac{y^2}{2}-31{,}5=y$$

$$y^2-2y-63=0$$

Корни полученного квадратного уравнения: $y_1=9$, $y_2=-7$. Поскольку $y_2<0$, второй корень не учитываем и для определения x имеем уравнение

$$\sqrt{2x^2-6x+85}=9,$$

обе части которого положительны, следовательно, условия теоремы 1 выполнены и после возведения в квадрат

$$2x^2-6x+85=81 \qquad (б)$$

и решения получающегося квадратного уравнения

$$x^2-3x+2=0$$

получаем два корня $x_1=1,\ x_2=2$.

Подстановкой обеих корней в исходное уравнение убеждаемся, что оба они обращают это уравнение в тождество.

Ответ: $x_1=1,\ x_2=2$.

Заметим, что в данном уравнении проверка сделана для подстраховки, поскольку все преобразования приводили нас к равносильным уравнениям. Действительно, ОДЗ данного уравнения дается неравенством

$$2x^2-6x+85\geq 0.$$

Хотя при оформлении решения мы данное неравенство не решали и даже не формулировали, в процессе решения, как видно из уравнения (б), оно удовлетворяется автоматически. Поэтому оба полученных корня попали в ОДЗ.

§2.5. Новая переменная – комбинация радикалов.

В только что рассмотренном примере 2.13 реализован случай наиболее простой замены переменной, применяющейся при решении иррациональных уравнений, когда в качестве новой переменной принимается радикал, зависящий от исходной переменной. Если в уравнении присутствует более одного радикала, приходится искать более сложные замены переменной, представляющие уже *комбинации (чаще всего алгебраические суммы) нескольких радикалов*.

Пример 2.14. Решить уравнение

$$\sqrt{2x+3}+3x=12-2\sqrt{2x^2-3x-9}-\sqrt{x-3}$$

Решение. ОДЗ данного уравнения дается системой неравенств

$$\begin{cases} 2x+3\geq 0 \\ x-3\geq 0 \\ (2x+3)(x-3)\geq 0 \end{cases}, \text{ решение которой: } \quad x\geq 3.$$

Воспользуемся одним из самых «дельных» советов элементарной математики: разложим квадратный трехчлен на сомножители и перепишем уравнение в следующем виде

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-3}+3x+2\sqrt{(2x-3)(x-3)}=12$$

Вводим новую переменную

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-3}=t\geq 0. \qquad \text{(а)}$$

Докажем теперь, что все уравнение будет квадратным относительно новой переменной. Действительно,

$$2x+3+2\sqrt{(2x-3)(x-3)}+x-3=t^2$$

$$3x+2\sqrt{(2x-3)(x-3)}=t^2$$

и уравнение (а) примет вид

$t^2+t-12=0$, откуда $t_1=3;\ t_2=-4$ – посторонний корень (<0).

Возвращаемся к переменной x и получаем уравнение

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-3}=3,$$

решение которого проводим методом возведения в степень

$$3x+2\sqrt{(2x-3)(x-3)}=9$$

$$2\sqrt{(2x-3)(x-3)}=9-3x \qquad \text{(б)}$$

Условие неотрицательности обеих частей этого уравнения $9-3x\geq 0$ совместно с неравенством, определяющим ОДЗ $x\geq 3$ дает единственное значение, которое может быть корнем уравнения: $x=3$. Поэтому вместо возведения в квадрат обеих частей уравнения (б), просто подставим значение $x=3$ в исходное уравнение и убедимся, что оно обращает его в тождество:

$$3+9=12-2\cdot 0-0, \qquad 12\equiv 12.$$

Ответ: $x=3$.

§2.6. Однородные иррациональные уравнения

Рассмотрим далее *однородные иррациональные уравнения*. В этом типе уравнений замену следует проводить только после того, как доказана однородность рассматриваемого уравнения, что обычно представляет основную трудность. После этого решение проводится аналогично тому, как это производилось в однородных алгебраических уравнениях.

Пример 2.15. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{(9+x)^2}+2\cdot\sqrt[3]{(9-x)^2}-3\cdot\sqrt[3]{81-x^2}=0.$$

Решение. ОДЗ данного уравнения – вся числовая ось. Перепишем его в «однородном» виде

$$\sqrt[3]{(9+x)^2}-3\cdot\sqrt[3]{(9+x)(9-x)}+2\cdot\sqrt[3]{(9-x)^2}=0$$

В данном уравнении упомянутые выше при решении однородных алгебраических функции u и v равны

$$u=\sqrt[3]{(9+x)},\quad v=\sqrt[3]{(9-x)}.$$

Делим обе части уравнения на $v^2=\sqrt[3]{(9-x)^2}\neq 0$. Обоснуем это преобразование. Предположим противное: $v^2=\sqrt[3]{(9-x)^2}=0$, т.е. $x=9$. Подставим это значение в исходное уравнение и получим $\sqrt[3]{324}=0$, что неверно. Данное противоречие и доказывает, что $x\neq 9$. После деления уравнение примет вид

$$\left(\sqrt[3]{\frac{9+x}{9-x}}\right)^2-3\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{9+x}{9-x}}\right)+2=0.$$

Замена переменной теперь очевидна: $z=\sqrt[3]{\dfrac{9+x}{9-x}}$. После решения квадратного уравнения

$$z^2-3z+2=0,$$

которое имеет корни $z_1=1,\quad z_2=2$, возвращаемся к исходной переменной

$$\sqrt[3]{\frac{9+x}{9-x}}=1 \qquad\qquad \sqrt[3]{\frac{9+x}{9-x}}=2$$

$$\frac{9+x}{9-x}=1 \qquad\qquad \frac{9+x}{9-x}=8$$

$$x=0 \qquad\qquad x=7.$$

В процессе решения встретилось две опасные выкладки: деление на функцию, содержащую неизвестную величину и избавление от знаменателя $9-x$ при нахождении корней. Оба преобразования требуют выполнение условия $x \neq 9$, что было доказано в процессе решения. Поэтому ответ можно формулировать без проверки. Однако, ввиду простоты корней ее все же рекомендуется сделать.

Ответ: $x=0, \quad x=7.$

§2.7. Иррациональные уравнения с неизвестной в дробной степени

Следующий тип иррациональных уравнений, требующих при решении замены переменной, – это *уравнения содержащие выражения вида* $\sqrt[n]{x^m}$. Такие уравнения рекомендуется решать в следующем порядке:

1). Привести все выражения в уравнении к дробным степеням при помощи формул

$$\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}, \quad x^m \cdot x^n = x^{m+n}, \qquad \frac{x^m}{x^n}=x^{m-n}, \ \left(x^m\right)^n = x^{mn}, x^{-m}=\frac{1}{x^m}.$$

2). Избавиться, если это необходимо, от x в знаменателях, оставив в уравнении только положительные степени неизвестной.

3). Привести все дроби в показателях степеней к общему знаменателю k.

4). Ввести новую переменную $z=x^{\frac{r}{k}}$, где числитель r в показателе степени следует выбрать так, чтобы в терминах новой переменной уравнение не содержало бы радикалов.

Пример 2.16. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x^2}-2\cdot\sqrt[6]{x}+\sqrt{x}=2$$

Решение. ОДЗ уравнения определяется неравенством $x \ge 0$. Переходим к дробным степеням

$$x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{6}} + x^{\frac{1}{2}} = 2,$$

$$x^{\frac{4}{6}} + x^{\frac{3}{6}} - 2x^{\frac{1}{6}} = 2.$$

Вводим новую переменную по формуле

$$z = x^{\frac{1}{6}},\ z \ge 0.$$

Теперь уравнение запишется как уравнение четвертой степени относительно переменной z

$$z^4 + z^3 - 2z - 2 = 0,$$

$$z^3(z+1) - 2(z+1) = 0,$$

$$(z+1)(z^3 - 2) = 0.$$

Таким образом, имеем два корня $z_1 = -1,\ z_2 = \sqrt[3]{2}$. Отрицательный корень не учитываем и для определения x имеем уравнение

$$\sqrt[6]{x} = \sqrt[3]{2}, \text{ откуда } x = 4.$$

§2.8. Введение двух неизвестных

Если в уравнении присутствует несколько радикалов степени выше второй, может помочь *метод введения двух неизвестных*.

Пример 2.17. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{2x+12} + \sqrt[4]{5-2x} = 3.$$

Решение. ОДЗ определяется системой неравенств

$$\begin{cases} 2x+12 \ge 0 \\ 5-2x \ge 0 \end{cases}, \text{ откуда } -6 \le x \le \frac{5}{2}.$$

Вводим две новые переменные

$$\sqrt[4]{2x+12} = u \ge 0,\ \sqrt[4]{5-2x} = v \ge 0$$

Теперь уравнение запишется в виде

$$u+v=3.$$

Вторую зависимость между новыми переменными получим, преобразуя их зависимости от x. Имеем

$$\begin{cases}2x+12=u^4\\5-2x=v^4\end{cases}, \qquad \text{т.е.} \qquad u^4+v^4=17$$

Объединяем полученные соотношения в систему и решаем ее методом исключения неизвестных.

$$\begin{cases}u+v=3\\u^4+v^4=17\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}v=3-u\\u^4+(3-v)^4=17\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}v=3-u\\u^4+(u-3)^4=17\end{cases}.$$

Уравнение для определения переменной u представляет собой рассмотренное ранее (см. §1.15) уравнение вида $(x+a)^4+(x+b)^4=c$, решение которого рекомендуется начинать с замены переменной $x=y-\dfrac{a+b}{2}$. В нашем случае $a=0,\ b=-3$, т.е.

$$u=y-\frac{0+(-3)}{2}=y+\frac{3}{2}.$$

Для определения y, таким образом, имеем уравнение

$$\left(y+\frac{3}{2}\right)^4+\left(y-\frac{3}{2}\right)^4=17.$$

Возводим двучлены в четвертую степень и приводим подобные

$$y^4+4y^3\cdot\frac{3}{2}+6y^2\cdot\frac{9}{4}+4y\cdot\frac{27}{8}+\frac{81}{16}+y^4-4y^3\cdot\frac{3}{2}+6y^2\cdot\frac{9}{4}-4y\cdot\frac{27}{8}+\frac{81}{16}=17$$

$$2y^4+27y^2-\frac{55}{8}=0$$

Полученное биквадратное уравнение решаем стандартной заменой $y^2=z\ge 0$. Тогда

$$2z^2+27z-\frac{55}{8}=0 \qquad \Rightarrow \qquad z_1=\frac{1}{4},\ z_2=-\frac{55}{4}<0.$$

Учитываем только положительный корень и последовательно находим все предыдущие переменные:

$$z=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad y_1=\frac{1}{2},\ \ y_2=-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad u_1=2,\ \ u_2=1.$$

Переменную v находить не имеет смысла, поскольку мы просто продублируем вычисления. Итак, для определения x имеем два уравнения

$\sqrt[4]{2x+12}=2$	$\sqrt[4]{2x+12}=1$
$2x+12=16$	$2x+12=1$
$x=2$	$x=-\dfrac{11}{2}$

Оба корня входят в ОДЗ. В четную степень мы возводили обе части уравнений только в конце решения, когда неотрицательность обеих частей была очевидна. Решение обосновано.

Ответ: $x_1=2,\ \ x_2=-\dfrac{11}{2}.$

§2.9. Тригонометрические замены переменной

Специфической формой введения новых неизвестных служат *тригонометрические замены переменных.* Идея использования этих замен состоит в сведении иррационального уравнения к более простому тригонометрическому уравнению за счет свойств тригонометрических функций. Выбор замены зависит от вида уравнения. Например, если в уравнение входит радикал $\sqrt{a^2-x^2}$, то целесообразно сделать замену $x=a\cdot\cos t$ или $x=a\cdot\sin t$. Если в уравнении присутствует радикал $\sqrt{a^2+x^2}$, то можно сделать замену $x=a\cdot tgt$. Если же в уравнение входит радикал $\sqrt{x^2-a^2}$, то возможна замена $x=\dfrac{a}{\cos t}$ или $x=\dfrac{a}{\sin t}$.

Кроме указанных форм радикалов на целесообразность применения тригонометрических замен может указывать наличие в уравнении выражений, напоминающих формулы тригонометрии. Например, $1-2x^2$, $2x^2-1$, $4x^3-3x$, $3x-4x^3$ и т.п.

Пример 2.18. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{1-|x|}{2}} = 2x^2 - 1.$$

Решение. Определение ОДЗ уравнения приводит к необходимости выполнения неравенства $1-|x| \geq 0$, откуда $-1 \leq x \leq 1$.

Заметим, что левая и правая части уравнения являются четными функциями. Следовательно, если x_1 – корень уравнения, то и $(-x_1)$ также будет его корнем. Это дает возможность рассматривать только значения $x > 0$ ($x = 0$ не является корнем). С учетом ОДЗ и указанного условия можем рассматривать значения x, удовлетворяющие условию $0 < x < 1$ (значение $x = 1$ также не является корнем).

Дополнительно из условия неотрицательности правой части уравнения необходимо добавить ограничение $2x^2 - 1 \geq 0$, что в совокупности с условием $0 < x < 1$ приведет к неравенству

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < 1. \qquad \text{(a)}$$

Вводим тригонометрическую замену $x = \sin t$. Ввиду неравенства (a) можно считать, что $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin t < 1$, т.е. $\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{\pi}{2}$.

С учетом введенной тригонометрической подстановки исходное уравнение запишется в виде (при данных ограничениях на новую переменную t можно считать, что $|\sin t| = \sin t$)

$$\sqrt{\frac{1-\sin t}{2}} = -\cos 2t.$$

Правая часть этого уравнения $-\cos 2t \geq 0$, если $\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{\pi}{2}$. Поэтому можно обе части уравнения возвести в квадрат и решить получающееся тригонометрическое уравнение. Имеем

$$\frac{1-\sin t}{2} = \cos^2 2t \;\Rightarrow\; \left(2\cos^2 2t - 1\right) + \sin t = 0 \;\Rightarrow\; \cos 4t + \sin t = 0 \;\Rightarrow$$

$$\cos 4t + \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 0 \;\Rightarrow\; 2\cos\left(\frac{3t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{5t}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Приравниваем каждый сомножитель к нулю. Имеем две совокупности решений:

а). $\cos\left(\frac{3t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{3t}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n \;\Rightarrow\; t = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in Z$. Так как $\frac{\pi}{4} \le t < \frac{\pi}{2}$, то в данной совокупности ни при каком значении n нет корней исходного уравнения.

б). $\cos\left(\frac{5t}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{5t}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k \;\Rightarrow\; t = \frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, \quad k \in Z$. При $k = 0$ имеем значение $t = \frac{3\pi}{10} \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Таким образом, $x = \sin\frac{3\pi}{10}$, и исходное уравнение имеет два корня $x = \sin\frac{3\pi}{10}$ и $x = -\sin\frac{3\pi}{10}$. Ответ можно оставить в тригонометрической форме, а можно записать и в радикалах, ибо

$$x = \sin\frac{3\pi}{10} = \sin 54^0 = \cos 36^0 = 1 - 2\sin^2 18^0 = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Ответ: $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

§2.10. Умножение обеих частей уравнения на вспомогательную функцию

Иногда иррациональное уравнение удается решить довольно быстро, если умножить обе его части на удачно подобранную функцию. При этом могут появиться посторонние корни (нули этой функции). Поэтому предлагаемый метод требует обязательного исследования полученных значений. Чаще всего при этом используются формулы

$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b,\quad a\ge 0,\ b\ge 0,$

$\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)=a-b,$

$\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)=a+b.$

Пример 2.19. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2+4x+9}+\sqrt{3x^2-4x+9}=4x.$$

Решение. ОДЗ определяется системой неравенств

$$\begin{cases}3x^2+4x+9\ge 0\\ 3x^2-4x+9\ge 0\end{cases}\quad\Rightarrow\qquad x\in R.$$

Заметим, что левая часть уравнения неотрицательна. Поэтому уравнение будет иметь решение только, если $x\ge 0$.

Умножим обе части уравнения на выражение

$$\sqrt{3x^2+4x+9}-\sqrt{3x^2-4x+9},$$

которое является сопряженным для выражения, стоящего в левой части. После очевидных преобразований получим следующее уравнение

$$8x=4x\cdot\left(\sqrt{3x^2+4x+9}-\sqrt{3x^2-4x+9}\right),$$

$$4x\cdot\left(\sqrt{3x^2+4x+9}-\sqrt{3x^2-4x+9}-2\right)=0.$$

Полученное уравнение имеет корень $x=0$, однако, это значение не удовлетворяет исходному уравнению и поэтому может быть отброшено. В результате имеем уравнение

$$\sqrt{3x^2+4x+9}-\sqrt{3x^2-4x+9}=2,$$

которое является никак не легче исходного. Используем то, что это уравнение является следствием исходного уравнения и поэтому эти уравнения должны быть рассмотрены совместно.

$$\begin{cases}\sqrt{3x^2+4x+9}+\sqrt{3x^2-4x+9}=4x\\ \sqrt{3x^2+4x+9}-\sqrt{3x^2-4x+9}=2\end{cases}.$$

Складывая их и сокращая на 2, получаем

$$\sqrt{3x^2+4x+9}=2x+1$$

Требуем выполнения условия $2x+1\geq 0$, что совместно с ранее выдвинутым условием $x\geq 0$ дает область локализации корней $x\geq 0$. Возводим обе части полученного уравнения в квадрат и в результате получим

$$x^2=8\text{, т.е. } x=\pm 2\sqrt{2}.$$

Условию $x\geq 0$ удовлетворяет только корень $x=2\sqrt{2}$.

Проверка.

$x=2\sqrt{2}$: $\sqrt{33+8\sqrt{2}}+\sqrt{33-8\sqrt{2}}=4\cdot 2\sqrt{2}$

$$\sqrt{32+8\sqrt{2}+1}+\sqrt{32-8\sqrt{2}+1}=8\sqrt{2}$$

$$\sqrt{\left(4\sqrt{2}+1\right)^2}+\sqrt{\left(4\sqrt{2}-1\right)^2}=8\sqrt{2}$$

$$\left|4\sqrt{2}+1\right|+\left|4\sqrt{2}-1\right|=8\sqrt{2}$$

$$4\sqrt{2}+1+4\sqrt{2}-1=8\sqrt{2}$$

$$8\sqrt{2}=8\sqrt{2}.$$

Ответ: $x=2\sqrt{2}$.

Заметим, что умножение на сумму радикалов не приводит обычно к появлению посторонних корней. Дело в том, что область определения этой суммы та же, что у исходного уравнения. К тому же чаще всего оба радикала не обращаются в ноль одновременно. Поэтому указанная сумма радикалов положительна, что позволяет после умножения на нее получить уравнение, равносильное исходному. Если же приходится умножать на разность радикалов, как в только что рассмотренном примере, то появление посторонних корней практически неизбежно. В рассмотренном примере таким посторонним корнем было значение $x=0$.

§2.11. Метод разложения на сомножители

Данный метод является одним из основных методов решения практически всех типов уравнений. Однако, его реализация при решении иррациональных уравнений требует осторожности, когда речь идет о таких преобразованиях, как вынесение множителя за знак радикала, разбиение радикала на два сомножителя и т.п. Дело в том, что легко можно сделать ошибки, если не учитывать при этих преобразованиях знаки подкоренных выражений. Например, при разбиении радикала на два сомножителя нужно учитывать, что

$$\sqrt{a\cdot b}=\begin{cases}\sqrt{a}\cdot\sqrt{b},\ a\ge 0, b\ge 0\\ \sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b},\ a<0, b<0\end{cases} \tag{2.3}$$

Пример 2.20. Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x-2}=\sqrt{x^2-3x-4}$$

Решение. Находим вначале ОДЗ уравнения, требуя неотрицательности подкоренных выражений. Решаем систему неравенств

$$\begin{cases}2x^2+x-1\ge 0\\ x^2-x-2\ge 0\\ x^2-3x-4\ge 0\end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases}(x+1)(2x-1)\ge 0\\ (x+1)(x-2)\ge 0\\ (x+1)(x-4)\ge 0\end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases}x\in(-\infty;-1]\cup[0,5;\infty)\\ x\in(-\infty;-1]\cup[2;\infty)\\ x\in(-\infty;-1]\cup[4;\infty)\end{cases} \Rightarrow$$

$$x\in(-\infty;-1]\cup[4;\infty).$$

Раскладывая квадратные трехчлены на сомножители, запишем исходное уравнение в виде

$$\sqrt{(x+1)(2x-1)}+\sqrt{(x+1)(x-2)}-\sqrt{(x+1)(x-4)}=0 \tag{a}$$

Под каждым радикалом стоит сомножитель $x+1$, что позволяет применить метод разложения на сомножители. Учитывая, что на различных участках ОДЗ сомножители под радикалами будут иметь разные знаки, разбиваем решение на два этапа.

I. $x\in(-\infty;-1]$.

На этом участке все сомножители отрицательны и в соответствии с формулой (2.3) имеем

$$\sqrt{(x+1)(2x-1)}=\sqrt{-x-1}\cdot\sqrt{1-2x}$$

$$\sqrt{(x+1)(x-2)}=\sqrt{-x-1}\cdot\sqrt{2-x}$$

$\sqrt{(x+1)(x-4)} = \sqrt{-x-1} \cdot \sqrt{4-x}$

После вынесения общего сомножителя, уравнение (а) примет вид

$$\sqrt{-x-1} \cdot \left(\sqrt{1-2x} + \sqrt{2-x} - \sqrt{4-x}\right) = 0$$

Равенство нулю первого сомножителя дает значение $x = -1$, которое принадлежит рассматриваемому интервалу и удовлетворяет уравнению. Приравниваем нулю второй сомножитель и учитывая требования теоремы 1, получаем уравнение

$$\sqrt{1-2x} + \sqrt{2-x} = \sqrt{4-x}$$

После возведения в квадрат и локализации радикала в левой части получим уравнение

$$2\sqrt{(1-2x)(2-x)} = 1+2x,$$

которое может иметь решение только при выполнении неравенства $1+2x \geq 0$. Это приводит к условию $x \geq -\frac{1}{2}$, что не совместимо с требованием $x \in (-\infty;-1]$. Таким образом, второй сомножитель на рассматриваемом интервале в нуль не обращается.

II. $x \in [4;\infty)$. На этом участке по формуле (2.3) будем иметь

$\sqrt{(x+1)(2x-1)} = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{2x-1}$

$\sqrt{(x+1)(x-2)} = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-2}$

$\sqrt{(x+1)(x-4)} = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-4}$

Аналогично предыдущему получим

$$\sqrt{x+1} \cdot \left(\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-2} - \sqrt{x-4}\right) = 0$$

Теперь значение $x = -1$, обращающее в нуль первый сомножитель, представляет собой посторонний корень, т.к. это значение не принадлежит интервалу $[4;\infty)$. Равенство нулю второго сомножителя в конечном итоге приводит к уравнению

$$2\sqrt{(2x-1)(x-2)} = -(1+2x).$$

Условие неотрицательности правой части приведет к неравенству $x \le -\dfrac{1}{2}$, что противоречит условию $x \in [4;\infty)$.

Ответ: $x = -1$.

§2.12. Уравнения, содержащие кубические радикалы

При решении уравнений, которые содержат более одного кубического радикала, проявляется некоторая специфика преобразований, дающая основание для выделения этой группы уравнений в отдельный тип.

Пример 2.21. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x-34} - \sqrt[3]{x-71} = 1.$$

Решение. ОДЗ данного уравнения: $x \in R$.

1-й способ (введение новой переменной)

Обозначим $\sqrt[3]{x-34} = y$. Тогда $x = y^3 + 34$ и уравнение примет вид

$$\sqrt[3]{y^3 - 37} = y - 1.$$

Возводя обе части в куб (по теореме 1 равносильность уравнений выполняется), получим после приведения подобных членов квадратное уравнение $y^2 - y - 12 = 0$, решая которое, находим $y_1 = -3,\ y_2 = 4$.

Возвращаемся к переменной x:

$\sqrt[3]{x-34} = -3$, $x = 7$ или $\sqrt[3]{x-34} = 4$, $x = 98$.

Проверкой убеждаемся, что оба корня удовлетворяют уравнению.

2-й способ (введение двух новых переменных)

Обозначим $\sqrt[3]{x-34} = u,\ \sqrt[3]{x-71} = v$. Возводим обе части этих соотношений в куб и вычитаем одно из другого. В результате получаем систему уравнений, которую решаем без комментариев

$$\begin{cases} u - v = 1 \\ u^3 - v^3 = 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u - v = 1 \\ (u-v)(u^2 + uv + v^2) = 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = u - 1 \\ u^2 + u(u-1) + (u-1)^2 = 37 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v = u - 1 \\ u^2 - u - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = -3 \\ v_1 = -4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} u_2 = 4 \\ v_2 = 3 \end{cases}.$$

Возвращение к исходной переменной дает те же решения, что были получены первым способом: $x_1 = 7, \quad x_2 = 98$.

3-й способ (возведение обеих частей уравнения в куб)

Уравнения рассматриваемой структуры могут быть решены также возведением обеих частей в третью степень и группировкой утроенных произведений при помощи формул

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b) \qquad (2.4)$$

Возводим обе части исходного уравнения в куб

$$x - 34 - 3 \cdot \sqrt[3]{(x-34)^2(x-71)} + 3 \cdot \sqrt[3]{(x-34)(x-71)^2} - (x-71) = 1$$

$$37 - 3 \cdot \sqrt[3]{(x-34)(x-71)} \cdot \left(\sqrt[3]{x-34} - \sqrt[3]{x-71}\right) = 1$$

Учитывая, что по условию $\sqrt[3]{x-34} - \sqrt[3]{x-71} = 1$, получим

$$12 - \sqrt[3]{(x-34)(x-71)} \cdot 1 = 0,$$

$$x^2 - 105x + 686 = 0.$$

Корни этого уравнения: $\qquad x_1 = 7, \quad x_2 = 98$.

Ответ: $x_1 = 7, \quad x_2 = 98$.

Если число кубических радикалов в уравнении больше двух, только третий способ дает возможность быстро найти решение.

Пример 2.22. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{2x-7} + \sqrt[3]{x-7} - \sqrt[3]{3x-14} = 0.$$

Решение. ОДЗ: $x \in R$. Записываем уравнение в виде

$$\sqrt[3]{2x-7} + \sqrt[3]{x-7} = \sqrt[3]{3x-14}$$

и возводим обе его части в куб

$$2x - 7 + 3 \cdot \sqrt[3]{(2x-7)^2(x-7)} + 3 \cdot \sqrt[3]{(2x-7)(x-7)^2} + x - 7 = 3x - 14$$

$$3 \cdot \sqrt[3]{(2x-7)(x-7)} \cdot \left(\sqrt[3]{2x-7} + \sqrt[3]{x-7}\right) = 0$$

$$\sqrt[3]{(2x-7)(x-7)(3x-14)}=0$$

Уравнение разложено на сомножители. Приравниваем каждый из них к нулю и получаем три корня исходного уравнения. Проверяем их и записываем ответ.

Ответ: $x_1=\dfrac{7}{2},\ \ x_2=7,\ \ x_3=\dfrac{14}{3}.$

§2.13. Иррациональные уравнения, сводящиеся к модульным

В основной своей массе иррациональные уравнения сложнее, чем уравнения, содержащие знак модуля. Поэтому, если выражение под знаком радикала представляет собой степень некоторой функции, то необходимо воспользоваться формулами

$$\sqrt[2n]{f^{2n}(x)}=\left|f(x)\right|,\ \sqrt[2n+1]{f^{2n+1}(x)}=f(x) \qquad (2.5)$$

Это практически наверняка облегчит дальнейшее решение. Отметим, частные случаи формул (2.5)

$$\sqrt{f^2(x)}=\left|f(x)\right|,\quad \sqrt[3]{f^3(x)}=f(x),\quad \sqrt{x^2}=|x|. \qquad (2.6)$$

Пример 2.23. Решить уравнение

$$\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}-\sqrt{x+5-6\sqrt{x-4}}=2$$

Решение. Сделаем подстановку $\sqrt{x-4}=y\geq 0$. Тогда $x=y^2+4$ и уравнение примет вид

$$\sqrt{y^2-2y+1}-\sqrt{y^2-6y+9}=2,$$

$$\sqrt{(y-1)^2}-\sqrt{(y-3)^2}=2.$$

Теперь применим первую из формул (2.6) и получим

$$|y-1|-|y-3|=2.$$

Полученное уравнение решаем методом интервалов

I. $0\leq y\leq 1$: $(1-y)-(3-y)=2 \qquad \Rightarrow -2=2 \quad \Rightarrow$ решений нет.

II. $1 < y \le 3: (y-1)-(3-y)=2 \qquad \Rightarrow y=3 \in (1;3]$.

Ш. $y>3: \quad (y-1)-(y-3)=2 \qquad \Rightarrow 2=2 \qquad \Rightarrow \; y \in R$.

Итак, решение $y \ge 3$. Переходим к исходной переменной. Для ее определения имеем неравенство

$\sqrt{x-4} \ge 3$, т.е. $x \ge 13$.

Ответ: $x \in [13;\infty)$.

Следует отметить, что ОДЗ этого уравнения $x \ge 4$ определяется требованием нетрицательности только внутреннего подкоренного выражения. Его можно было находить при решении заключительного иррационального неравенства. Что касается существования внешних радикалов, то в процессе решения было доказано, что под ними стоят полные квадраты, т.е они заведомо существуют.

§2.14. Иррациональные уравнения, содержащие знак модуля

При решении большинства уравнений этого типа рекомендуется сначала избавляться от радикалов, а уже затем раскрывать модули. При этом следует руководствоваться положениями, сформулированными выше.

Пример 2.24. Решить уравнение

$$\sqrt{3x+4} = 5-|x-3|$$

Решение. ОДЗ определяется неравенством $3x+4 \ge 0$, т.е. $x \ge -\frac{4}{3}$.

Для того, чтобы избавиться от радикала, необходимо возвести обе части уравнения во вторую степень. Чтобы в обеих частях уравнения стояли неотрицательные выражения, необходимо перед этим потребовать выполнения неравенства

$$5-|x-3| \ge 0 \Rightarrow |x-3| \le 5 \Rightarrow \begin{cases} x-3 \le 5 \\ x-3 \ge -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 8 \\ x \ge -2 \end{cases} \Rightarrow -2 \le x \le 8.$$

С учетом ОДЗ получаем область локализации корней

$$-\frac{4}{3} \le x \le 8. \qquad (а)$$

После возведения обеих частей уравнения в квадрат получим

$$3x + 4 = 25 - 10 \cdot |x - 3| + x^2 - 6x + 9,$$

$$x^2 - 9x - 10 \cdot |x - 3| + 30 = 0.$$

Раскрываем модуль по определению: $|x-3| = \begin{cases} x-3, & x-3 \ge 0 \\ 3-x, & x-3 < 0 \end{cases}$

I. $x \ge 3$. С учетом неравенства (а) попадаем в область $3 \le x \le 8$. Здесь уравнение запишется в виде

$$x^2 - 9x - 10(x - 3) + 30 = 0,$$

$$x^2 - 19x + 60 = 0.$$

Из двух корней $x_1 = 4,\ \ x_2 = 15$ интервалу $[3;15]$ принадлежит только значение $x_1 = 4$.

II. $x < 3$. Ввиду (19) попадаем на интервал $\left[-\frac{4}{3};3\right)$. Здесь решаем уравнение

$$x^2 - 9x - 10(3 - x) + 30 = 0, \text{ т.е. } x^2 + x = 0.$$

Таким образом, имеем два значения $x_1 = -1,\ \ x_2 = 0$, которые оба принадлежат интервалу $\left[-\frac{4}{3};3\right)$.

Ответ: $x_1 = 4,\ \ x_2 = -1,\ \ x_3 = 0$.

§2.15. Учет структуры уравнения

При этом способе решения множество, представляющее собой ОДЗ исходного уравнения и ограничения на неизвестную, следующие из анализа структуры уравнения должны в совокупности либо сводиться к пустому множеству (тогда уравнение не имеет решения) либо давать в пересечении только одну точку, которая проверяется затем простой подстановкой в уравнение. Если же пересечением упомянутых множеств служит интервал, то данный метод не применим.

Пример 2.25. Решить уравнение

$$\sqrt{x+1-2x^2}=\sqrt{x}-\frac{3}{2}.$$

Решение. Легко заметить, что простое возведение в квадрат обеих частей приведет к очень сложному уравнению. Так же не подходит ни один из рассмотренных выше методов решения.

ОДЗ уравнения определяется системой неравенств

$\begin{cases} x+1-2x^2 \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$, решение которой имеет вид $x \in [0;1]$.

Поскольку в левой части уравнения стоит радикал четной степени, то уравнение может иметь решение только в том случае, если правая часть будет неотрицательна. Это возможно только при выполнении условия $\sqrt{x}-\frac{3}{2}\ge 0$, т.е. при $x \ge \frac{9}{4}$. Данное множество не имеет с интервалом [0;1] общих точек. Таким образом, решений у данного уравнения нет.

Ответ: $x \in \varnothing$.

Отметим, что в уравнениях рассматриваемого типа практически отсутствуют математические преобразования.

§2.16. Использование монотонности функций

Метод решения, основанный на исследовании монотонности функций, входящих в уравнение, применим как к обычным школьным задачам, так и к более сложным, нестандартным задачам, где этот метод оказывается зачастую единственным, позволяющим получить решение. Кроме того, использование монотонности функций, входящих в уравнение, практически всегда упрощает техническую часть решения.

Часто удается доказать, что в одной части уравнения стоит монотонно возрастающая функция, а в другой – монотонно убывающая функция. Тогда можно воспользоваться тем фактом, что графики этих функций могут иметь не более одной точки, т.е. такое уравнение может иметь только единственный корень (или не иметь корней вообще). Не проводя никаких алгебраических преобразований, корень такого уравнения можно просто подобрать и этим процесс решения задачи завершить. Теоретическое обоснование подобных действий дают теоремы, ранее сформулированные в §1.18.

Геометрический смысл приведенных теорем достаточно ясен – горизонтальная прямая или график монотонно убывающей функции может пересечь график монотонно возрастающей функции $y = f(x)$ или постоянной не более, чем в одной точке. Другими словами эти графики либо вообще не пересекутся, либо пересекутся в одной точке.

Доказательство монотонности функций, входящих в уравнение, может проводиться различными способами. Отметим некоторые из них.

Во-первых, можно основываться на определении монотонных функций. Напомним, что функция $y = f(x)$ называется *монотонно возрастающей* на некотором промежутке, если для любых значений x_1 и x_2 из этого промежутка из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, т.е., большему значению аргумента будет соответствовать большее значение функции. Если же из неравенства $x_1 < x_2$ будет следовать неравенство $g(x_1) > g(x_2)$ (большему значению аргумента будет соответствовать меньшее значение функции), то функция $y = g(x)$ будет *монотонно убывающей*.

Во-вторых, если это возможно, можно привести графическое решение задачи, изобразив схематично графики монотонных функций и ориентировочно абсциссу их точки пересечения.

В третьих, можно воспользоваться критериями монотонности функций, основанными на знаках их производных. Именно, функция $y = f(x)$ будет на некотором промежутке монотонно возрастающей (монотонно убывающей), если на этом промежутке ее производная $f'(x)$ будет положительной (отрицательной).

При решении иррациональных уравнений полезно воспользоваться тем, что функция $f(x) = \sqrt[n]{x}$ монотонна. Например, функция $f(x) = \sqrt[n]{ax+b}$ в своей области определения возрастает при $a > 0$ и убывает при $a < 0$.

Отметим также два важнейших свойства монотонных функций, которые часто используются при решении уравнений описываемым методом.

Свойство А. Сумма возрастающих (убывающих) функций – функция, возрастающая (убывающая) на их общей области определения.

Свойство В. Разность возрастающей и убывающей (убывающей и возрастающей) функций – функция, возрастающая (убывающая) на их общей области определения.

Рассмотрим примеры.

Пример 2.26. Решить уравнение

$$\sqrt[5]{2x-1} + \sqrt{5x-1} = 3$$

Решение. ОДЗ: $x \geq \frac{1}{5}$. В левой части – сумма возрастающих функций, а в правой – константа. Значит, уравнение имеет не более одного корня. Подбором определяем, что значение $x = 1$ удовлетворяет уравнению.

Ответ: $x = 1$.

В этом примере корень $x = 1$ был просто угадан. Однако, назвать приведенное решение нестрогим нельзя – доказано, что решений не больше одного и оно предъявлено. Кстати, угадывать решение в задачах, решение которых основывается на свойствах монотонных функций, обычно, довольно просто – следует перебирать неотрицательные значения аргумента из ОДЗ и искать, при каких из них нацело извлекаются радикалы, стоящие в условии задачи.

Пример 2.27. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{3x-4}+\sqrt{7x+8}-\sqrt{57-2x}=1$$

Решение. ОДЗ уравнения находим, как решение системы неравенств:

$$\begin{cases} 7x+8\geq 0 \\ 57-2x\geq 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x\geq -\dfrac{8}{7} \\ x\leq \dfrac{57}{2} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad -\frac{8}{7}\leq x\leq \frac{57}{2}.$$

Левая часть уравнения – возрастающая в своей области определения функция, т.к. первые два радикала с увеличением x увеличиваются, а третий уменьшается, но он вычитается из первых двух и поэтому их разность возрастает (свойство В). Следовательно, уравнение имеет не более одного решения. При подборе корня исследуем поочередно все целые значения аргумента из ОДЗ.

Начинаем со значения $x=-1$, т.к. все остальные отрицательные целые значения x не входят в ОДЗ. При $x=-1$ третий радикал «не извлекается» и уравнение не удовлетворяется. Последовательно перебираем значения $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$ и убеждаемся, что и при этих значениях аргумента левая часть уравнения принимает значения, не равные 1. Наконец, при подстановке значения $x=4$ получается тождество 2+6-1=1.

Ответ: $x=4$.

Естественно, угадать корень можно далеко не всегда, но метод использования монотонности и не претендует на универсальность. Чаще всего к нему прибегают тогда, когда другие, более традиционные методы решения, рассмотренные ранее, к цели не приводят.

Если целые значения аргумента, принадлежащие ОДЗ, уравнению не удовлетворяют, можно попробовать локализовать корень, чтобы сузить область поиска и попробовать проанализировать ряд дробных чисел, при которых извлекаются нацело радикалы, входящие в уравнение. С этой целью при переборе целых значений неизвестного необходимо сравнивать значения левой и правой частей уравнения и определить пару целых значений аргумента x, при которых знак сравнения изменится на противоположный (больше на меньше или наоборот). Тогда можно сделать вывод, что корень находится между этими целыми числами.

Пример 2.28. Решить уравнение

$$\sqrt{28-2x}-1=\sqrt{2x+1}+\sqrt[5]{23+6x}$$

Решение. ОДЗ уравнения: $-\frac{1}{2}\le x\le 14$. Левая часть уравнения представляет собой монотонно убывающую функцию, а правая – монотонно возрастающую. Из теоремы о «встречной» монотонности следует, что уравнение имеет не более одного корня. Перебираем целые значения аргумента из ОДЗ и приходим к выводу, что ни одно из этих значений уравнению не удовлетворяет. Сравниваем величины левой и правой частей уравнения.

При $x=0$ и при $x=1$ левая часть уравнения больше правой части, а при $x=2$ знак сравнения меняется и левая часть уравнения становится больше правой части ($\sqrt{24}-1<\sqrt{5}+\sqrt[5]{35}$). Приходим к выводу, что значение искомого корня уравнения находится между числами 1 и 2. Теперь достаточно легко убедиться, что это значение равно $\frac{3}{2}$. Действительно, подставляя $x=\frac{3}{2}$ в уравнение, убеждаемся, что оно обращается в верное равенство: 5-1=2+2.

Ответ: $x=\frac{3}{2}$

§2.17. Метод оценок

При решении уравнений методом оценок необходимо отыскать в условии «слабое» место, т.е. такую функцию, наибольшее или наименьшее значения которой возможно найти (например, квадратный трехчлен, сумму двух взаимно обратных выражений и т.п.). При определении наибольшего или наименьшего значения функции можно использовать методы дифференциального исчисления.

Пример 2.29. Решить уравнение

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=x^2-4x+6$$

Решение. ОДЗ: $1 \le x \le 3$. Рассмотрим квадратный трехчлен в правой части уравнения и выделим в нем полный квадрат

$$x^2-4x+6=(x^2-4x+4)+2=(x-2)^2+2\ge 2.$$

Теперь видно, что обе части исходного уравнения положительны, Возводя их во вторую степень, получим равносильное уравнение

$$2+2\cdot\sqrt{-x^2+4x-3}=\left((x-2)^2+2\right)^2 \qquad (20)$$

Найдем наибольшее значение, которое может принимать подкоренное выражение в левой части

$$-x^2+4x-3=-\left((x^2-4x+4)-1\right)=-\left((x-2)^2-1\right)=1-(x-2)^2\le 1.$$

Таким образом, $\sqrt{-x^2+4x-3}\le 1 \quad \Rightarrow \quad 2+2\cdot\sqrt{-x^2+4x-3}\le 4$.

Итак, левая часть уравнения (20) меньше или равна 4, а правая – больше или равна 4. В соответствии с методом оценок составляем систему

$$\begin{cases} 2+2\cdot\sqrt{-x^2+4x-3}=4 \\ \left((x-2)^2+2\right)^2=4 \end{cases}$$

Находим корень второго уравнения системы $x=2$ и подставляя его в первое уравнение, убеждаемся, что оно обращается в тождество.

Ответ: $x=2$.

Пример 2.30. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2-12x+13}+\sqrt{7x^2-28x+32}=16x-13-4x^2$$

Решение. ОДЗ уравнения – все множество действительных чисел, поскольку оба квадратных трехчлена, стоящие под знаками радикалов, имеют отрицательные дискриминанты. Выделим в каждом квадратном трехчлене полный квадрат и оценим все выражения, входящие в уравнение

$$\sqrt{3x^2-12x+13}=\sqrt{3(x-2)^2+1}\geq\sqrt{1}=1$$

$$\sqrt{7x^2-28x+32}=\sqrt{7(x-2)^2+4}\geq\sqrt{4}=2$$

$$16x-13-4x^2=3-4(x-2)^2\leq 3$$

Таким образом в уравнении

$$\sqrt{3(x-2)^2+1}+\sqrt{7(x-2)^2+4}=3-4(x-2)^2$$

левая часть должна быть не меньше 3, а правая часть, наоборот, не больше 3. Значит, равенство возможно лишь при таком значении x, при котором обе части уравнения равны 3. Имеем систему

$$\begin{cases}\sqrt{3(x-2)^2+1}=1\\ \sqrt{7(x-2)^2+4}=2,\\ 3-4(x-2)^2=3\end{cases}$$

каждое уравнение которой имеет единственное решение $x=2$.

Ответ: $x=2$.

Пример 2.31. Решить уравнение

$$\sqrt{4x-x^2}+\sqrt{4x-x^2-3}=3+\sqrt{2x-x^2}$$

Решение. Не находя ОДЗ, оценим все радикалы, присутствующие в левой части уравнения. Имеем

$$4x-x^2=-\left(x^2-4x+4\right)+4=4-(x-2)^2\leq 4 \qquad\Rightarrow\qquad \sqrt{4x-x^2}\leq 2,$$

$$4x-x^2-3=-\left(x^2-4x+4\right)+1=1-(x-2)^2\leq 1 \qquad\Rightarrow\qquad \sqrt{4x-x^2-3}\leq 1$$

Что касается оценки правой части уравнения, то учитывая неотрицательность радикала четной степени, можем утверждать, что

$$3+\sqrt{2x-x^2}\geq 3.$$

Таким образом, левая часть уравнения не превосходит 3, а правая часть – не меньше 3. В соответствии с методом оценок имеем систему

$$\begin{cases} \sqrt{4x-x^2}+\sqrt{4x-x^2-3}=3 \\ 3+\sqrt{2x-x^2}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{4x-x^2}=2 \\ \sqrt{4x-x^2-3}=1. \\ \sqrt{2x-x^2}=0 \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы имеет единственное решение $x=2$, которое удовлетворяет также и второму и третьему уравнению системы. Следовательно, $x=2$ – общий корень всех трех уравнений системы.

Хотя фактически мы уже сделали проверку исходного уравнения системы при $x=2$, все же не мешает еще раз оформить ее, так как при решении мы обошлись без определения ОДЗ.

Проверка: $x=2$: $\sqrt{4}+\sqrt{1}=3 \Rightarrow 3\equiv 3$.

Ответ: $x=2$.

Пример 2.32. Решить уравнение

$$(5x+2)\sqrt[5]{7x-3}=54.$$

Решение. Попытка избавиться от радикала приводит к неприведенному уравнению шестого порядка, решить которое очень непросто. Пойдем другим путем.

Запишем уравнение в виде

$$(5x+2)\sqrt[5]{7x-3}=27\cdot 2.$$

Тогда одно из решений получим, если приравняем множители в левой и правой частях уравнения:

$$\begin{cases} 5x+2=27 \\ \sqrt[5]{7x-3}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x=25 \\ 7x-3=32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=5 \end{cases} \Rightarrow x=5.$$

Естественно, это только часть решения. Нужно или найти другие решения или доказать, что найденный корень единственный. С этой целью проведем следующие оценки.

1. При $x<5$ справедливы неравенства

$$5x+2<27 \text{ и } \sqrt[5]{7x-3}<2, \text{ т.е. } (5x+2)\sqrt[5]{7x-3}<54.$$

2. При $x>5$ аналогично можно показать, что

$$(5x+2)\sqrt[5]{7x-3}>54.$$

Таким образом, в исходном уравнении равенство может быть достигнуто лишь при $x=5$.

Ответ: $x=5$.

Пример 2.33. Решить уравнение

$$|x+2|+|x+3|=\sqrt{x^2+x+8}+\sqrt{x^2+17}$$

Решение. ОДЗ уравнения: $x\in R$.

Воспользуемся формулами

$$|x+2|=\sqrt{(x+2)^2}=\sqrt{x^2+4x+4}, \; |x+3|=\sqrt{(x+3)^2}=\sqrt{x^2+6x+9}$$

и выделим полученные квадратные трехчлены под радикалами в правой части уравнения:

$$\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2+6x+9}=\sqrt{x^2+4x+4-3\left(x-\frac{4}{3}\right)}+\sqrt{x^2+6x+9-6\left(x-\frac{4}{3}\right)}$$

При $x=\dfrac{4}{3}$ левая часть уравнения равна правой части, т.е. значение $x=\dfrac{4}{3}$ – корень уравнения.

При $x<\dfrac{4}{3}$ левая часть уравнения левая часть меньше правой части.

При $x>\dfrac{4}{3}$ левая часть уравнения левая часть больше правой части.

Делаем вывод, что при $x<\dfrac{4}{3}$ и при $x>\dfrac{4}{3}$ уравнение корней не имеет.

Ответ: $x=\dfrac{4}{3}$.

§2.18. Суперпозиция функций

Суперпозицией функций называется сложная функция, составленная из двух и более функций. Например, сложная функция $f(g(x))$ есть суперпозиция двух функций $f(t)$ и $t = g(x)$. Свойства суперпозиции функций могут быть использованы при решении уравнений вида

$$f(f(x)) = x \qquad (2.7)$$

или уравнений более общего вида

$$f(f(\ldots f(x))) = x \qquad (2.8)$$

Лемма. Любой корень x_1 уравнения

$$f(x) = x \qquad (2.9)$$

будет и корнем уравнений (2.7), (2.8).

Действительно, в частности, так как $f(f(x_1)) = f(x_1) = x_1$, то уравнение (2.7) является следствием уравнения (2.9).

На этой лемме основаны следующие, весьма полезные при решении уравнений теоремы.

Теорема A. Если функция $f(x)$ монотонно возрастает, то уравнения (2.8) и (2.9) (так же, как и уравнения (2.7) и (2.9)) равносильны.

Теорема B. Пусть функция $f(x)$ монотонно возрастает и имеет обратную функцию $f^{-1}(x)$. Тогда уравнения $f(x) = f^{-1}(x)$ и $f(x) = x$ равносильны.

Пример 2.34. Решить уравнение

$$\sqrt{3+\sqrt{x}} = x - 3.$$

Решение. ОДЗ данного уравнения: $x \geq 0$. Кроме того, из условия согласования знаков левой и правой частей следует к тому же, что $x - 3 \geq 0$, т.е., $x \geq 3$.

Перепишем уравнение в виде

$$3 + \sqrt{3+\sqrt{x}} = x.$$

Обозначим $f(x) = 3 + \sqrt{x}$, тогда выписанное уравнение можно представить в виде $f(f(x)) = x$. Рассмотрим функцию $f(x)$. Ее производная

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ сохраняет положительное значение при всех $x \ge 3$. Таким образом, можно утверждать, что при всех значениях $x \ge 3$ функция $f(x)$ возрастает и, следовательно, условия теоремы 1 выполнены. Находим корни уравнения $f(x)=x$, т.е., уравнения

$$3+\sqrt{x}=x.$$

Последовательно находим

$$\begin{cases}\sqrt{x}=x-3\\ x-3\ge 0\end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases}x=x^2-6x+9\\ x\ge 3\end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases}x^2-7x+9=0\\ x\ge 3\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}x_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{2}\\ x\ge 3\end{cases} \Rightarrow \quad x=\frac{7+\sqrt{13}}{2}.$$

Ответ: $x=\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}$.

Пример 2.35. Решить уравнение

$$x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}.$$

Решение. Запишем данное уравнение в виде

$$\frac{x^3+1}{2}=\sqrt[3]{2x-1}.$$

Покажем, что левая и правая части этого уравнения представляют собой взаимно обратные функции.

Пусть $f(x)=\dfrac{x^3+1}{2}$, тогда $x^3+1=2f(x)$, т.е., $x=\sqrt[3]{2f(x)-1}$. Таким образом, $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{2x-1}$ и уравнение принимает в наших обозначениях вид $f(x)=f^{-1}(x)$. Так как $f(x)$ является монотонно возрастающей функцией, то в силу теоремы В необходимо решить уравнение $f(x)=x$, а именно $\dfrac{x^3+1}{2}=x$. Последовательно находим

$$x^3+1=2x \;\Rightarrow\; x^3-2x+1=0 \;\Rightarrow\; \left(x^3-1\right)-2(x-1)=0 \;\Rightarrow$$

$$(x-1)\left(x^2+x-1\right)=0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^2+x-1=0 \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. .$$

Ответ: $x_1=1,\; x_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

В следующей сложной задаче необходимо, во-первых, используя понятие суперпозиции функций, увидеть, какую именно функцию следует ввести в рассмотрение, и, во-вторых, учесть такие ее свойства, как нечетность и монотонность.

Пример 2.36. Решить уравнение

$$(2x+1)\left(1+\sqrt{4x^2+4x+8}\right)+x\left(1+\sqrt{x^2+7}\right)=0.$$

Решение. После выделения под первым радикалом полного квадрата, уравнение можно переписать в виде

$$(2x+1)\left(1+\sqrt{(2x+1)^2+7}\right)+x\left(1+\sqrt{x^2+7}\right)=0.$$

Теперь видно, что ОДЗ уравнения – вся числовая ось: $x\in R$. Введем в рассмотрение функцию

$$f(x)=x\left(1+\sqrt{x^2+7}\right).$$

При таком выборе исходному уравнению можно придать вид

$$f(2x+1)+f(x)=0.$$

Исследуем свойства введенной функции $f(x)$. Во-первых, заметим, что $f(x)$ – нечетная функция. Как известно, функция $y=f(x)$ называется *нечетной*, если в своей области определения она удовлетворяет соотношению $f(-x)=-f(x)$. В нашем случае

$$f(-x)=(-x)\cdot\left(1+\sqrt{(-x)^2+7}\right)=-x\cdot\left(1+\sqrt{x^2+7}\right)=-f(x).$$

Замеченное свойство позволяет переписать уравнение в виде

$$f(2x+1)=-f(x) \;\Leftrightarrow\; f(2x+1)=f(-x).$$

Далее, при $x \geq 0$ рассматриваемая функция $f(x)$ является произведением двух возрастающих неотрицательных сомножителей x и $\left(1+\sqrt{x^2+7}\right)$, что гарантирует возрастание $f(x)$ при $x \geq 0$. А в силу нечетности можно утверждать, что $f(x)$ возрастает и при $x < 0$ (график нечетной функции симметричен относительно начала координат). Тем самым, функция $f(x)$ монотонно возрастает на всей числовой оси. Как следствие, равенство $f(2x+1) = f(-x)$ выполняется только при условии

$$2x+1=-x\text{, т.е. } x=-\frac{1}{3}.$$

Ответ: $x=-\frac{1}{3}$.

ГЛАВА III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

§3.1. Задания по теме «Алгебраические уравнения»

Решить уравнения.

Метод преобразования алгебраических выражений

$\frac{4}{x+3}+\frac{4}{x-3}=1$ Отв.: $-1; 9$.

$\frac{x}{x+4}+\frac{4}{x-4}=\frac{20}{x^2-16}$ Отв.: ± 2.

$\frac{2x}{x+5}-\frac{5}{5-x}=\frac{25}{x^2-25}$ Отв.: $0;\ \frac{5}{2}$.

$\frac{x}{x+3}-\frac{5}{x-3}=\frac{18}{x^2-9}$ Отв.: 11.

$\frac{x-2}{2x-1}-\frac{x+1}{3x-1}=\frac{x-8}{6x-2}$ Отв.: 2.

$\frac{x+2}{x-1}+\frac{2x-1}{x+3}=\frac{3x-4}{x+4}$ Отв.: $-2;\ -\frac{2}{3}$.

$\frac{2x-1}{x+3}+\frac{x}{x+1}=\frac{3x}{x+4}$ Отв.: $-2;\ \frac{1}{2}$.

$\frac{x}{x-4}=\frac{4}{x-4}+\frac{2}{x+4}+\frac{7}{x^2-16}$ Отв.: 5; -3.

$\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\frac{7}{9}\cdot\frac{x+1}{x-1}$ Отв.: 2.

$\frac{7(x-2)(x-3)(x-4)}{(2x-7)(x+2)(x-6)}=-2$ Отв.: $0;\ 5;\ \frac{38}{11}$.

$\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x(x-2)}+\frac{x-4}{x(x+2)}=0$ Отв.: 3.

$\frac{x}{x^2-9}+\frac{1}{2x(x+3)}-\frac{x-1}{x^2-3x}=0$ Отв.: 1.

$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{4}{x(x-1)}=\frac{-2}{x^2+x-2}$ Отв.: -1.

Метод разложения на сомножители. Теорема Безу

$x^3+x^2-10x+8=0$ Отв.: -4; 1; 2.

$x^3-6x^2+5x+12=0$ Отв.: -1; 3;4.

$x^3-4x^2+x+6=0$ Отв.: -1; 2; 3.

$x^{38}+6x^{37}+11x^{36}+6x^{35}=0$ Отв.: $-1; -2; -3; 0.$

$x^4+x^3-x^2-7x-6=0$ Отв.: -1; 2.

$x^4+2x^3-x=2$ Отв.: 1; -2.

$x^4-4x^3-13x^2+28x+12=0$ Отв.: 2; -3; $\frac{5\pm\sqrt{33}}{2}$.

$x^6-2x^5+3x^4-4x^3+3x^2-2x+1=0$

Указание. Дважды разделив левую часть на $x-1$, получим $(x-1)^2(x^2+1)^2=0$.

Отв.: 1.

$x^6-8x^4+19x^2-12=0$ Отв.: $\pm1; \pm\sqrt{3}; \pm2$.

$x^3-3x+2=0$ Отв.: -2; 1.

$x^3-x-6=0$ Отв.: 2.

$x^3-3x^2+4=0$ Отв.: -1; 2.

$x^3+4x^2-5=0$ Отв.: $1; \frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$.

$x^4-2x^3+16x=0$ Отв.: $0; -2$.

$8x^3-4x^2-5x+1=0$ Отв.: $1; \frac{-1\pm\sqrt{3}}{4}$.

$4x^3-3x^2+7=0$ Отв.: -1.

$2x^3+x^2-2x-1=0$ Отв.: ±1; $-\frac{1}{2}$.

$5x^3-6x^2+11x-2=0$ Отв.: $\frac{1}{5}$.

$4x^3+7x^2+7x+3=0$ Отв.: $-\frac{3}{4}$.

$24x^3-26x^2+9x-1=0$ Отв.: $\frac{1}{4};\frac{1}{3};\frac{1}{2}$.

$36x^4-36x^3-37x^2+11x+6=0$ Отв.: $-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};\frac{1}{2};\frac{3}{2}$.

$27x^3+9x^2-48x+20=0$ Отв.: $-\frac{2}{3};-\frac{5}{3}$.

$21x^3+x^2-5x-1=0$ Отв.: $-\frac{1}{3};\ \frac{1}{-1\pm2\sqrt{2}}$.

$8x^4+x^3+64x+8=0$ Отв.: $-2;-\frac{1}{8}$.

$x^4+2x^3-x^2-2x=0$ Отв.: 0; -2; -1; 1.

Применение формул сокращенного умножения

$1-16x^2(x-1)^2=0$ Отв.: $\frac{1}{2};\ \frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$.

$\left(\frac{x^2+6}{x^2-4}\right)^2=\left(\frac{5x}{4-x^2}\right)^2$ Отв.: ±3.

$\left(x^3+x+1\right)^2=\left(x^2+3x-1\right)^2$ Отв.: 0; 1; $\pm\sqrt{2}$.

$\left(x^2-4x+5\right)^2=\left(x^2-2x-1\right)^2$ Отв.: 1; 2; 3.

$x^4-3x^2+4x-3=0$

Указание. Представить уравнение в виде $x^4-2x^2+1=x^2-4x+4$. Затем использовать формулу для разности квадратов. Отв.: $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.

$x^4-4x^3-1=0$

Указание. Представить уравнение в виде $2x^4-4x^3+2x^2=x^4+2x^2+1$.

Отв.: $\frac{1\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2-\sqrt{2}}$.

$x^4+4x-1=0$

Указание. Представить уравнение в виде $x^4+2x^2+1=2x^2-4x+2$.

Отв.: $\dfrac{-1\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2-\sqrt{2}}$.

$x^4-8x-7=0$ Отв.: $\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{8\sqrt{2}-2}}{2}$.

$x^4-12x+323=0$ Отв.: $\varnothing$.

$x^4+4x^2-4x+15=0$ Отв.: $\varnothing$.

$x^4+8x^3+16x^2-36=0$ Отв.: $-2\pm\sqrt{10}$.

$x^4-4x^3+4x^2-4=0$ Отв.: $-1\pm\sqrt{3}$.

$x^4-6x^3+9x^2-25=0$ Отв.: $\dfrac{3\pm\sqrt{29}}{2}$.

$x^4+10x^3+25x^2-1=0$ Отв.: $\dfrac{-5\pm\sqrt{29}}{2};\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$.

$4x^4+8x^3+7x^2-2x-1=0$

Указание. Заметить, что $4\left(x^2+x+1\right)^2=4x^4+8x^3+12x^2+8x+4$ и выделить это выражение в левой части уравнения. В результате получим: $4\left(x^2+x+1\right)^2=5(x+1)^2$. Отв.: $\dfrac{\sqrt{5}-2\pm\sqrt{4\sqrt{5}-7}}{4}$.

$x^4-2x^3+x^2+2x-1=0$

Указание. Заметить, что $\left(x^2-x+1\right)^2=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$ и выделить это выражение в левой части уравнения. В результате получим: $\left(x^2-x+1\right)^2=2(x-1)^2$. Отв.: $\dfrac{1-\sqrt{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

$\dfrac{1}{3}x^3+x^2+x+4=0$ Отв.: $-\sqrt[3]{11}-1$.

$3x^3+\dfrac{1}{3}x^2+x+1=0$

<u>Указание.</u> Добавить и вычесть из обеих частей выражение $\left(\frac{x}{3}\right)^3$ и записать уравнение в виде $\left(\left(\frac{x}{3}\right)^3+3\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^2+3\cdot\left(\frac{x}{3}\right)+1\right)+\left(3-\frac{1}{27}\right)x^3=0$, т.е. $\left(\frac{x}{3}+1\right)^3=-\frac{80}{27}x^3$. Отв.: $-\frac{3}{1+\sqrt[3]{80}}$.

$x^3+x^2+\frac{1}{3}x+1=0$

<u>Указание.</u> Умножить обе части на 3^3 и привести уравнение к виду $(3x+1)^3=-26$. Отв.: $-\frac{\sqrt[3]{26}+1}{3}$.

$5x^3+x^2+x+\frac{1}{3}=0$

<u>Указание.</u> Преобразуем: $(15-1)x^3+(x+1)^3=0$. Отв.: $-\frac{1}{\sqrt[3]{14}+1}$.

$12x^3+3x^2+3x+1=0$.

<u>Указание.</u> Преобразуем: $(x+1)^3=-11x^3$ Отв.: $-\frac{1}{1+\sqrt[3]{11}}$.

$x^3-9x^2+9x-3=0$

<u>Указание.</u> Преобразуем: $2x^3=3(x-1)^3$ Отв.: $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$.

$x^3+12x^2-24x+16=0$

<u>Указание.</u> Преобразуем: $3x^3=2(x-2)^3$ Отв.: $\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}$.

$9x^3+6x^2+12x+8=0$

<u>Указание.</u> Преобразуем: $(x+2)^3=-8x^3$. Отв.: $-\frac{2}{3}$.

$2x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x - 1 = 0$ Указание. Добавить к обеим частям уравнения выражение $\left(\frac{x}{3}\right)^3$ и записать уравнение в виде $2x^3 + \left(\frac{x}{3}\right)^3 - \left(\left(\frac{x}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{3}\right) + 1\right) = 0$, т.е. $\frac{55}{27}x^3 = \left(\frac{x}{3} + 1\right)^3$.

Отв.: $\frac{3}{\sqrt[3]{55} - 1}$.

$(x-2)^4 = (3x+1)^4$ Отв.: $-\frac{3}{2}; \frac{1}{4}$.

$(x+1)^4 = 2(1 + x^4)$

Указание. Раскрыть скобки и привести уравнение к виду $(x-1)^4 = 12x^2$.

Отв.: $-1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$.

Многоступенчатая группировка

$x^3 + 2x - 5\sqrt{3} = 0$

Указание. Представить уравнение в виде $\left(x^3 - 3\sqrt{3}\right) + 2\left(x - \sqrt{3}\right) = 0$ Отв.: $\sqrt{3}$.

$x^3 + 2x - 7\sqrt{5} = 0$ Отв.: $\sqrt{5}$.

$x^3 - \left(1 + \sqrt{2}\right)x^2 + 2 = 0$

Указание. Представить уравнение в виде $\left(x^3 - 2\sqrt{2}\right) - \left(x^2 - 2\right)\left(1 + \sqrt{2}\right) = 0$

Отв.: $\sqrt{2}$; $\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2}$.

$2x^4 - 7x^3 + x^2 + 7x - 3 = 0$

Указание. Сгруппировать отдельно 1-й, 3-й, 5-й и 2-й, 4-й члены уравнения с целью вынести за знак всей левой части выражение $\left(x^2 - 1\right)$. Отв.: $\pm 1; 3; \frac{1}{2}$.

$2x^4 + x^3 - 4x^2 + 1 = 0$

Указание. Провести следующие преобразования:

$2\left(x^4-2x^2+1\right)+\left(x^3-1\right)=0 \Rightarrow$

$(x-1)\left(2(x-1)(x+1)^2+x^2+x-1\right)=0 \Rightarrow (x-1)\left(2\left(x^3+x^2-x-1\right)+x^2+x+1\right)=0$

$\Rightarrow \quad (x-1)\left(2\left(x^2+x-1\right)x+\left(x^2+x-1\right)\right)=0.$ Отв.: $1; -\frac{1}{2}; \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

$x^2(1+x)^2+x^2=8(1+x)^2$

Указание. Раскрыть скобки и привести подобные слагаемые. Получим уравнение $x^4+2x^3-6x^2-16x-8=0$. Сгруппируем слагаемые таким образом, чтобы за скобки можно было вынести множитель $(x+2)$. Имеем:

$\left(x^4+2x^3\right)-\left(6x^2+12x\right)-(4x+8)=0 \Rightarrow$

$(x+2)\left(x^3-6x-4\right)=0 \Rightarrow (x+2)\left(x^3+8-6(x+2)\right)=0.$ Отв.: $-2;\ 1\pm\sqrt{3}$.

$x^2(x-1)^2-8(x-1)^2+x^2=0$

Указание. Привести уравнение к виду $x^3(x-2)-6x(x-2)+4(x-2)=0$

Отв.: $2;\ -1\pm\sqrt{3}$.

$\left(x^2+2x-3\right)^3+\left(2x^2-5x+2\right)^3=\left(3x^2-3x-1\right)^3$

Указание. Обозначить $x^2+2x-3=u$, $2x^2-5x+2=v$, тогда $3x^2-3x-1=u+v$. Записать уравнение в терминах функций u и v и разложить левую часть по формуле суммы кубов. Тогда уравнение перепишется в виде $(u+v)\left(u^2-uv+v^2-(u+v)^2\right)=0$, т.е. $(u+v)uv=0$.

Отв.: -3; 1; 2; $\frac{1}{2}; \frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$.

$$\frac{4x^2}{4x^2+1}+16x^2-17x+4=0$$

Указание. Записать уравнение в виде $\frac{4x^2}{4x^2+1}-x+4(2x-1)^2=0$, т.е.

$(2x-1)^2\left(-\frac{x}{4x^2+1}+4\right)=0.$ Отв.: $\frac{1}{2}$.

(ДонНТУ,2006, 1.2.30б, 18.08.06) $\frac{4x^2}{3x^2+1}+12x^2-17x+4=0$

Указание. Преобразуем: $\frac{4x^2}{3x^2+1}-x+4\left(3x^2-4x+1\right)=0$, т.е.

$\frac{\left(3x^2-4x+1\right)\left(12x^2-x+4\right)}{3x^2+1}=0$. Отв.: $\frac{1}{3}$; 1.

Специальная структура уравнений

$x^4+2x^3+3x^2-2x+5=0$ Отв.: $x\in\varnothing$.

$5x^4-3x^3-6x^2+11x-9=0$ Отв.: $\frac{-1\pm\sqrt{46}}{5}$.

Уравнения, квадратные относительно коэффициентов

$x^4-2\sqrt{3}x^2+x+3-\sqrt{3}=0$

Указание. Преобразуем: $3-\left(2x^2+1\right)\sqrt{3}+\left(x^4+x\right)=0$, $D=(2x-1)^2$.

Отв.: $\frac{-1\pm\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}$; $\frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}$.

$x^4-2\sqrt{2}x^2-x+2-\sqrt{2}=0$ Отв.: $\frac{1\pm\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$; $\frac{-1\pm\sqrt{4\sqrt{2}-3}}{2}$.

$\left(x^2-1\right)^2+\left(\sqrt{3}+1\right)\left(4x-\sqrt{3}-1\right)=0$ Отв.: $-1\pm\sqrt{1+\sqrt{3}}$.

$x^3+2\sqrt{7}x^2+7x+4\sqrt{7}+8=0$ Отв.: $-2-\sqrt{7}$.

Метод неопределенных коэффициентов

При каких значениях a и b многочлен $x^4-3x^3+3x^2+ax+b$ делится без остатка на трехчлен x^2-3x+4? Отв.: $a=3,\ b=-4$.

При каких значениях a и b многочлен $x^4-2x^3+ax^2-3x+b$ делится без остатка на трехчлен x^2-3x+3? Отв.: $a=2,\ b=6$.

При каком значении a многочлен x^3+6x^2+ax+5 делится без остатка на x^2+x+1? Отв.: $a=6$.

Общие методы решения рациональных уравнений

$3x^3 - 9x + 10 = 0$

<u>Указание.</u> Привести уравнение к виду $x^3 + \left(\sqrt[3]{3}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^3 - 3x \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = 0$ и воспользоваться «замечательным тождеством»

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc\right).$$

Отв.: $-\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

$20x^3 - 60x = 41$

<u>Указание.</u> Сделать замену $x = y + t$. Тогда уравнение примет вид $(y + t)^3 - 3(y + t) = \frac{41}{20}$, т.е. $y^3 + t^3 + 3ty(y + t) - 3(y + t) = \frac{41}{20}$. Поскольку вместо одной переменной введено две, то имеется возможность выбрать значения y и t так, чтобы выполнялось соотношение $yt = 1$. Тогда имеем $\begin{cases} ty = 1 \\ t^3 + y^3 = \frac{41}{20} \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} ty = 1 \\ y_1^3 = \frac{5}{4};\ y_2^3 = \frac{4}{5} \end{cases}$. Итак, имеем $y_1 = \sqrt[3]{\frac{5}{4}};\ t_1 = \sqrt[3]{\frac{4}{5}}$ или $y_2 = \sqrt[3]{\frac{4}{5}};\ t_2 = \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$.

Отв.: $x = \sqrt[3]{\frac{5}{4}} + \sqrt[3]{\frac{4}{5}}$.

Простейшие замены переменной

$(x + 3)^4 - 3(x + 3)^2 + 2 = 0$ Отв.: $-4; -2; -\sqrt{2} - 3; \sqrt{2} - 3$.

$\left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 + x + 2\right) = 12$ Отв.: $-2; 1$.

$\frac{x^4}{(2x + 3)^2} - \frac{2x^2}{2x + 3} + 1 = 0$ Отв.: $-1;\ 3$.

$\frac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x = 6$ Отв.: $1;\ 3$.

$$\frac{x^2-3x-6}{x}-\frac{8x}{x^2-3x-6}=-2$$ Отв.: $-3;\ -1;\ 2;\ 6.$

$$\frac{3x^2-9x}{2}-\frac{12}{x^2-3x}=3$$ Отв.: $\pm 1; 2; 4$.

$$\left(x^2-6x\right)^2-2\left(x-3\right)^2=81$$ Отв.: $3; 3\pm\sqrt{20}$.

$$\left(x^2+2x\right)^2-\left(x+1\right)^2=55$$ Отв.: $-4;\ 2$.

$$(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=1$$ Отв.: $-\frac{3}{2}; -\frac{5}{6}$.

$$(6x+5)^2(3x+2)(x+1)=35$$ Отв.: $\frac{-15\pm\sqrt{189}}{18}$.

$$\left(x^2-5x+7\right)(x-2)(x-3)=2$$ Отв.: $\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$.

$$(x+3)(x+1)(x+5)(x+7)=-16$$ Отв.: $-4\pm\sqrt{5}$.

$$(x-1)(x-7)(x-4)(x+2)=40$$ Отв.: $2; 3; \frac{5\pm\sqrt{89}}{2}$.

$$\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{2}{x^2-2x+3}=\frac{6}{x^2-2x+4}$$ Отв.: 1.

$$\frac{x^2-x}{x^2-x+1}-\frac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$$ Отв.: 0; 1.

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}$$ Отв.: $0;\ -2$.

$$(8x^2-3x+1)^2=32x^2-12x+1$$ Отв.: $0;\ \frac{3}{8};\ \frac{3\pm\sqrt{73}}{16}$.

$$(x^2+x+1)^2-3x^2-3x-1=0$$ Отв.: $-1;\ 0;\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

$$\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{12}$$ Отв.: $-3;\ 1$.

$$\frac{6}{(x+1)(x+2)}+\frac{8}{(x-1)(x+4)}=1$$ Отв.: $-3;\ 0;\ \frac{-3\pm\sqrt{73}}{2}$.

$$(x-1)x(x+1)(x+2)=24$$ Отв.: $-3;\ 2$.

$(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680$ Отв.: -1; 12.

$(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5$ Отв.: $-\frac{1}{12}$; $\frac{1}{2}$.

$(2x-3)(2x-1)(x+1)(x+2)=36$ Отв.: $-\frac{5}{2}$; 2.

$\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}=-\frac{1}{5}$ Отв.: -4; -1.

$\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x}+\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+1}=2$ Отв.: -2; 3; $\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$.

$(x^2-3x+1)(x^2+3x+2)(x^2-9x+20)=-30$

Указание. Использовать разложения квадратного трехчлена по корням и записать уравнение в виде $(x^2-3x+1)(x+1)(x+2)(x-4)(x-5)=-30$. Перемножить второй и четвертый, а также третий и пятый сомножители в левой части и ввести новую переменную $y=x^2-3x-10$.

Отв.: $\frac{3\pm\sqrt{29}}{2}$; $\frac{3\pm\sqrt{25+4\sqrt{30}}}{2}$; $\frac{3\pm\sqrt{25-4\sqrt{30}}}{2}$.

$(x^2-3x-6)(x^2+3x+2)(x^2-9x+20)=5$

Отв.: $\frac{3\pm\sqrt{29}}{2}$; $\frac{3\pm\sqrt{39+2\sqrt{29}}}{2}$; $\frac{3\pm\sqrt{39-2\sqrt{29}}}{2}$.

Дробно-рациональные замены переменных

$(2x^2-3x+1)(2x^2+5x+1)=9x^2$ Отв.: $\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$; $\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2}$.

$(2x-1)(x-2)(2x^2+7x+2)=-20x^2$ Отв.: $-\frac{1}{2}$; - 2.

$(x+3)(x+2)(x+8)(x+12)=4x^2$ Отв.: $-6; -4; \frac{-15\pm\sqrt{129}}{2}$.

$(x+3)(x+6)(x-1)(x-2)=12x^2$ Отв.: $-2; 3; \frac{-7\pm\sqrt{73}}{2}$.

$$\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1$$ Отв.: $\frac{1}{2};\frac{7}{2}$.

$$\left(x^2-6x-9\right)^2=x\left(x^2-4x-9\right)$$ Отв.: $-1; 9; \frac{5\pm\sqrt{61}}{2}$.

$$\frac{x}{x^2+3x+2}-\frac{x}{x^2+5x+2}=\frac{1}{24}$$ Отв.: $1;\ 2;\ \frac{-11\pm\sqrt{113}}{2}$.

$$\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\frac{3x}{x^2-8x+15}$$ Отв.: $7\pm\sqrt{34}$.

$$\frac{x^2-3x+1}{x}+\frac{2x}{x^2-2x+1}=\frac{7}{2}$$ Отв.: $\frac{1}{2};\ 2;\ 3\pm2\sqrt{2}$.

$$\frac{2x^2-x+3}{3}-\frac{2x^2}{2x^2-4x+3}=\frac{x}{6}$$ Отв.: $2;\ \frac{3}{4}$.

$$\frac{2x^2+x+2}{3x^2-x+3}=\frac{2x^2-3x+2}{x^2-x+1}$$ Отв.: 1.

$$\left(x^2-6x-9\right)^2=x\left(x^2-4x-9\right)$$ Отв.: $-1; 9; \frac{5\pm\sqrt{61}}{2}$.

Возвратно-симметрические уравнения

$$x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=4$$ Отв.: $1;\ \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

$$7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$$ Отв.: $\frac{1}{2};\ 2$.

$$4x^2+12x+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}=47$$ Отв.: $\frac{1}{2};\ 2;\ \frac{-11\pm\sqrt{105}}{4}$.

$$2\left(\frac{2}{x}-\frac{x}{3}\right)=\frac{2}{x^2}+\frac{x^2}{18}+\frac{4}{3}$$ Отв.: $-3\pm\sqrt{15}$.

$$x^2+\frac{36}{x^2}=\frac{112}{5}\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{x}\right)$$ Отв.: $5\pm\sqrt{31};\ \frac{3\pm\sqrt{159}}{5}$.

$$3\left(\frac{x^2}{9}+\frac{16}{x^2}\right)=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$$ Отв.: $-2;\ 6;\ 3\pm\sqrt{21}$.

$$\frac{x(x-1)^2}{(x^2-x+1)^2}=\frac{2}{9}$$ Отв.: $\frac{1}{2};\ 2;\ 2\pm\sqrt{3}.$

$$\frac{(x^2+1)^2}{x(x+1)^2}=\frac{625}{112}$$ Отв.: $\frac{1}{7};\ 7.$

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=5\left(x+\frac{1}{x}\right)$$ Отв.: $\sqrt{2}\pm 1;\ -\sqrt{2}\pm 1.$

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)=6$$ Отв.: 1.

$$12x^2+\frac{1}{3x^2}+10\left(2x+\frac{1}{3x}\right)+11=0$$ Отв.: $-1;-\frac{1}{6}.$

$$3x^4-25x^3+24x^2+100x+48=0$$ Отв.: $-1;-\frac{2}{3};4;6.$

$$x^4+3x^3+4x^2+6x+4=0$$ Отв.: -2; -1.

$$x^4-3x^3-8x^2+12x+16=0$$ Отв.: -2; -1; 2; 4.

$$x^4-2x^3-18x^2-6x+9=0$$ Отв.: -3; -1; $3\pm\sqrt{6}.$

$$4x^4-8x^3+3x^2-8x+4=0$$ Отв.: $\frac{1}{2};\ 2.$

Однородные алгебраические уравнения

$$(x^2-2x+2)^2+3x(x^2-2x+2)=10x^2$$ Отв.: -2; -1; $2\pm\sqrt{2}.$

$$2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$$ Отв.: -1; 2; 4; $-\frac{1}{2}.$

$$(2x^2-x+1)^2+x^2(2x^2-x+1)-6x^4=0$$ Отв.: 1.

$$(x^2-x)^4-5(x^2-x)^2x^2+6x^4=0$$ Отв.: 0; $1\pm\sqrt{2};\ 1\pm\sqrt{3}.$

$$(x^2-3x+1)^2+3(x-1)(x^2-3x+1)=4(x-1)^2$$ Отв.: $2\pm\sqrt{2};\ \frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}.$

$$x^4+5x^2(x+1)=6(x+1)^2$$ Отв.: $3\pm\sqrt{3};\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$

$$(2x-1)^2+(2x-1)(x+2)-2(x+2)^2=0$$ Отв.: $-\frac{3}{4};3.$

$2\left(x^3+1\right)+\left(x^2-x+1\right)^2=3\left(x+1\right)^2$ Отв.: 2; 0.

$20\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2+48\left(\dfrac{x^2-4}{x^2-1}\right)=0$ Отв.: $\dfrac{2}{3}$; 3.

$(x^2+x+1)^2=x^2(3x^2+x+1)$ Отв.: $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

$(x^2+6x-5)^2+x^3-5x=0$

<u>Указание</u>. Добавить и вычесть $6x^2$ и привести уравнение к однородному виду $(x^2+6x-5)^2+x(x^2+6x-5)-6x^2=0$. Отв.: $\dfrac{-9\pm\sqrt{101}}{2}$;–5;1.

Дополнение до полного квадрата

$x^2+\dfrac{81x^2}{(x+9)^2}=40$ Отв.: $1\pm\sqrt{19}$.

$x^2+\dfrac{x^2}{(x+1)^2}=3$ Отв.: $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

$x^2+\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2=8$ Отв.: 2; $-1\pm\sqrt{3}$.

$x^2+\left(\dfrac{x}{2x-1}\right)^2=2$ Отв.: 1; $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$.

$x^2+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2=3$ Отв.: $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

$\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2=90$ Отв.: $\dfrac{\pm\sqrt{5}}{2}$; $\dfrac{\pm3\sqrt{11}}{11}$.

$\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2+\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2=\dfrac{40}{9}$ Отв.: -1; 3; $\dfrac{11\pm\sqrt{55}}{11}$.

$\dfrac{1}{(x^2-2)^2}+\dfrac{1}{(x^2+2)^2}=\dfrac{40}{9x^4}$ Отв.: ±2; $\pm\sqrt[4]{\dfrac{20}{11}}$.

$x^4+10x^3-125x-54=0$ Отв.: $\dfrac{-5\pm\sqrt{133}}{2}$; $\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$.

$x^4+6x^3-27x-10=0$ Отв.: -5; 2; $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

$x^4-2x^3+x-30=0$ Отв.: -2; 3.

Уравнения вида $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ и $(x+a)^5-(x+b)^5=c$

$(x+1)^4+(x+1)^4=32$ Отв.: -3;1.

$(x+3)^4+(x+1)^4=20$ Отв: $-2\pm\sqrt{3\sqrt{2}-3}$.

$x^4+(x-2)^4=2$ Отв.: 1.

$(x-2)^4+(x+1)^4=17$ Отв.: 0; 1.

$x^4+(x-1)^4=97$ Отв.: -2; 3.

$(x+3)^5-(x-1)^5=64$ Отв.: -1.

$x^5+(6-x)^5=1056$ Отв.: 2; 4.

$(x-1)^5+(x+3)^5=242(x+1)$ Отв.: -2; -1; 0.

$(x-3)^4+(x-2)^4-(2x-5)^4=0$ Отв.: 2; 3.

Теорема Вейерштрасса

$x+x^2+x^3+\cdots=6$ Отв.: $\frac{6}{7}$.

$x^2-1+(x^2-1)^2+(x^2-1)^3+\cdots=3$ Отв.: $\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$.

$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\cdots}}}=6$ Отв.: 6.

$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}=3$ Отв.: 6.

$\sqrt{x+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\cdots}}}}=x$ Отв.: 2.

$\sqrt{x+3\sqrt{x+3\sqrt{x+3\sqrt{x+\cdots}}}}=x$ Отв.: 4; 0.

$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+2}}}=2$ Отв.: 2.

$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}=x$ Отв.: 2.

$x^{x^3}=3$ Отв.: $\sqrt[3]{3}$.

Выделение целой части

$\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{x-3}{x+3}+\dfrac{x+4}{x-4}=4$ Отв.: $\dfrac{-5\pm\sqrt{345}}{10}$.

$\dfrac{x-1}{x+2}-\dfrac{x-2}{x+3}=\dfrac{x-4}{x+5}-\dfrac{x-5}{x+6}$ Отв.: $-4;\ -\dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{2x-1}{x+1}+\dfrac{3x-1}{x+2}=\dfrac{x-7}{x-1}+4$ Отв.: $-\dfrac{5}{4};\ 5$.

$\dfrac{x^2+4x+4}{x+4}-\dfrac{2x+6}{x+2}=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}-\dfrac{2x+9}{x+3}$ Отв.: $0;\ \dfrac{-5\pm\sqrt{3}}{2}$.

$\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}+\dfrac{x^2+8x+20}{x+4}=\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}+\dfrac{x^2+6x+12}{x+3}$ Отв.: $-\dfrac{5}{2};\ 0$.

$31\cdot\left(\dfrac{24-5x}{x+1}+\dfrac{5-6x}{x+4}\right)+370=29\cdot\left(\dfrac{17-7x}{x+2}+\dfrac{8x+55}{x+3}\right)$ Отв.: $-\dfrac{5}{2}$.

$112+19\cdot\left(\dfrac{8-3x}{x+3}+\dfrac{3-2x}{x+7}\right)=17\cdot\left(\dfrac{15-x}{x+4}+\dfrac{31+2x}{x+6}\right)$ Отв.: -5.

Использование монотонности функций

$x^9+9x=10$ Отв.: 1.

$x^9-x^5+x=73\sqrt{3}$ Отв.: $\sqrt{3}$.

Сколько действительных корней имеет уравнение $x^5+x^2+1=0$?

Указание. Сделать замену $x=\dfrac{1}{y}$ и записать уравнение в виде $y^5+y^3+1=0$.

Функция $f(y)=y^5+y^3+1$ – возрастающая, при этом $f(-1)<0;\ f(1)>0$. Следовательно, эта функция имеет в интервале $(-1;1)$ единственный корень.

Отв.: один корень.

$32(x-2)^5+(x+1)^3=96$ Отв.: 3.

Метод оценок

$(x+1)^2+\dfrac{1}{(x+1)^2}=2-x^4$ Отв.: 0.

$x^{16}+1=2x^8-(x+x^2)^8$

<u>Указание</u>. Записать уравнение в виде $\left(x^8-1\right)^2=-\left(x+x^2\right)^8$.

Отв.: -1.

$\left(x^{2k}+1\right)\left(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2k-2}\right)=2kx^{2k-1}$

<u>Указание</u>. Отрицательных корней уравнение не имеет, поскольку левая часть всегда положительна. Уравнение нужно переписать в виде

$$x^{2k}+x^{2k+2}+x^{2k+4}+\cdots x^{4k-2}+1+x^2+x^4+\cdots+x^{2k-2}=2kx^{2k-1}.$$

Группируем слагаемые:

$$\left(x^{2k}+x^{2k-2}\right)+\left(x^{2k+2}+x^{2k-4}\right)+\cdots+\left(x^{4k-2}+1\right)=2kx^{2k-1}$$

Наконец, делим обе части на x^{2k-1}:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\cdots+\left(x^{2k-1}+\frac{1}{x^{2k-1}}\right)=2k\,.$$

Оцениваем скобки, приходим к выводу, что левая часть всегда больше или равна $2k$, причем равенство достигается только при $x=1$. Отв.: 1.

$\left(16x^{200}+1\right)\left(y^{200}+1\right)=16(xy)^{100}$

<u>Указание</u>. Делим обе части на $4(xy)^{100}$: $\left(4x^{100}+\dfrac{1}{4x^{100}}\right)\left(y^{100}+\dfrac{1}{y^{100}}\right)=4$.

Отв.: $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt[50]{2}}$, $y=\pm1$.

$(1+x)^8+(1+x^2)^4=2x^4$

<u>Указание</u>. Привести подобные и свести к виду $(1+x)^8+x^{\mathbf{8}}+4x^6+4x^4+1=0$.

Отв.: $x\in\varnothing$.

Уравнения вида f(f(x))=x

$\left(x^2+3x-2\right)^2+3\left(x^2+3x-2\right)-2=x$

Указание. Решить уравнение $x^2+3x-2=x$, т.е. $x^2+2x-2=0$. Затем раскрыть в исходном в исходном уравнении скобки и провести деление $\left(x^4+6x^3+8x^2-4x-4\right):\left(x^2+2x-2\right)=x^2+4x+2$.

Отв.: $-1\pm\sqrt{3}; -2\pm\sqrt{2}$.

$\left(x^2+2x-5\right)^2+2\left(x^2+2x-5\right)-5=x$

Указание. Решить уравнение $x^2+2x-5=x$. Затем раскрыть в исходном в исходном уравнении скобки и провести деление $\left(x^4+4x^3-4x^2-17x+10\right):\left(x^2+x-5\right)=x^2+3x-2$.

Отв.: $\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}; \frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.

Тригонометрические замены переменной

$8x^3-6x-1=0$

Указание. Построить график функции $y=8x^3-6x-1$. Учесть, что $x_{\max}=-\frac{1}{2}$;

$x_{\min}=\frac{1}{2}$ и $y(-1)=<0$; $y(1)>0$. Следовательно, все корни принадлежат отрезку $[-1;1]$ и можно сделать замену $x=\cos t$, $t\in[0;\pi]$. Тогда уравнение примет вид $\cos 3t=\frac{1}{2}$. Далее учесть, что $t\in[0;\pi]$.Отв.: $\cos\frac{\pi}{9}$; $\cos\frac{5\pi}{9}$; $\cos\frac{7\pi}{9}$.

$8x\left(1-2x^2\right)\left(8x^4-8x^2+1\right)=1$

Указание. Учитываем, что при $|x|\geq 1$ имеем $\left|1-2x^2\right|\geq 1$, $\left|8x^2\left(x^2-1\right)+1\right|\geq 1$, т.е. модуль левой части не менее 8.

Таким образом, можно делать тригонометрическую подстановку $x=\cos t$.

Отв.: $x_1=\cos\left(\frac{2\pi n}{9}\right), n\in Z, n\neq 9m, m\in Z;$

$x_2=\cos\left(\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi k}{7}\right), k\in Z, k\neq 3+7m, m\in Z$.

$8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)=1$ Отв.: $x_1=\cos\left(\frac{2\pi n}{7}\right), n\in Z, n\neq 7m, m\in Z;$

$x_2=\cos\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{9}\right), k\in Z, k\neq 4+9m, m\in Z$.

Усложненные уравнения

$\frac{1}{6x^2-7x+2}+\frac{1}{12x^2-17x+6}=4x^2-5x$ Отв.: $\frac{5\pm\sqrt{33}}{8}$.

$x^2+3x+2=15\cdot\frac{x^2+5x+10}{x^2+7x+12}$ Отв.: -7; 2.

$(x^2-16)(x-3)^2+9x^2=0$ Отв.: $-1\pm\sqrt{7}$.

$(x^2-20)(x-4)^2+16x^2=0$ Отв.: -4; 2.

$(x^2-32)(x-7)^2+49x^2=0$ Отв.: $-1\pm\sqrt{15}$.

$(x^2-5x+1)(x^2-4)=6(x-1)^2$ Отв.: $3\pm\sqrt{7}$; $\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$.

$(x^2+4x+8)^2+3x^3+14x^2+24x=0$ Отв.: -4; -2.

$x^4+3x^3+3x^2-2x-4=0$ Отв.: $\frac{\sqrt{5}-3\pm\sqrt{10\sqrt{5}-2}}{4}$.

$\frac{1}{3}x^3+x^2+x+a=0$ Отв.: $\sqrt[3]{1-3a}-1$.

$ax^3+\frac{1}{3}x^2+x+1=0$ Отв.: $\frac{3}{\sqrt[3]{1-27a}-1}$.

$x^3+x^2+\frac{1}{3}x^2+a=0$ Отв.: $\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{1-27a}-1\right)$.

$ax^3+x^2+x+\frac{1}{3}=0$ Отв.: $\frac{1}{\sqrt[3]{1-3a}-1}$.

$x^2(x+1)^4(x+2)^2+2(x+1)^2-1=0$ Отв.: $-1\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}+\sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)}\right)}$.

$(x^2-5x+7)^2-5(x^2-5x+7)+7=x$ Отв.: $1; 3; 3\pm\sqrt{2}$.

$(x^2+4x-6)^2+4(x^2+4x-6)-6=x$ Отв.: $\frac{-3\pm\sqrt{33}}{2}; \frac{-5\pm\sqrt{29}}{2}$.

§3.2. Задания по теме «Иррациональные уравнения»

Решить уравнения.

Учет структуры ОДЗ

$\left(x^2-1\right)\sqrt{2x-1}=0$ Отв.: $\frac{1}{2}$; 1.

$\left(x^2-4\right)\sqrt{x+1}=0$ Отв.: -1; 2.

$\left(x^2-4\right)\sqrt{2x+1}=0$ Отв.: $-\frac{1}{2}$; 2.

$\left(x^2-1\right)\sqrt{3x+4}=0$ Отв.: $-\frac{4}{3}$; -1; 1.

$\left(4x^2-9\right)\sqrt{x-1}=0$ Отв.: $\frac{3}{2}$; 1.

$\sqrt{4-x^2}\left(x^2-4x-5\right)=0$ Отв.: ± 2; -1.

$\sqrt{3-x^2}\left(x^2-3x-4\right)=0$ Отв.: $\pm\sqrt{3}$; -1.

$\sqrt{3-x}+\sqrt{x-5}=3$ Отв.: $\varnothing$.

$\sqrt{\frac{4-x}{x}}+\sqrt{\frac{x-4}{x+1}}=2-\sqrt{x^2-12}$ Отв.: 4.

$\sqrt{4-x^2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+7}-\sqrt{4x+1}$ Отв.: 2.

Метод возведения в степень

$\sqrt{-3x}=9$ Отв.: -27.

$\sqrt{-x}=-2$ Отв.: $\varnothing$.

$\sqrt{x^2+7x-10}=-1$ Отв.: $\varnothing$.

$\sqrt[3]{-2x-5}=-3$ Отв.: 11.

$\sqrt[5]{24x-2x^3}=x$ Отв.: -2; 0; 2.

$\sqrt{x^2-6x}=\sqrt{10-3x}$ Отв.: -2.

$\sqrt{3-x^2}=\sqrt{-5x-3}$ Отв.: -1.

$\sqrt{x^3+11x-13}=\sqrt{6x^2-7}$ Отв.: 2;3.

$\sqrt{x^3+2x}=\sqrt{5x^2-8}$ Отв.: 2;4.

$\sqrt{x}=-x$ Отв.: 0.

$\sqrt{x-2}=4-x$ Отв.: 3.

$\sqrt{6-x}=-x$ Отв.: -3.

$\sqrt{1-2x}=-1-x$ Отв.: -4.

$2\sqrt{x+31}=4-x$ Отв.: -6.

$\sqrt{15x^2-14}=2-3x$ Отв.: -3.

$x+5=\sqrt{8-9x-x^2}$ Отв.: -1.

$\sqrt{1+8x-x^2}=2x-2$ Отв.: 3.

$\sqrt{2x^2+8x+7}-x=2$ Отв.: -1.

$\sqrt{x^4-2x-5}=1-x$ Отв.: $-\sqrt{3}$.

$\sqrt{x^4-x^3-x^2-2x+1}=x-1$ Отв.: 2.

$\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+6}=6$ Отв.: 5.

$\sqrt{x+1}=8-\sqrt{3x+1}$ Отв.: 8.

$\sqrt{3-x}+\sqrt{x-6}=5$ Отв.: $\varnothing$.

$\sqrt{2-x}-\sqrt{x+8}=2$ Отв.: -7.

$\sqrt{x^2+x-5}+\sqrt{x^2+8x-4}=5$ Отв.: 2.

$\sqrt{2x+4}-\sqrt{x}=\sqrt{x-12}$ Отв.: 16.

$\sqrt{10-x}+\sqrt{x-5}=\sqrt{x}$ Отв.: 5;9.

$\sqrt{4+x}+\sqrt{x+7}=\sqrt{3-2x}$ Отв.: -3.

$\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$ Отв.: -1.

$\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+1}$ Отв.: $\dfrac{-2+6\sqrt{11}}{7}$.

$\sqrt{x}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}=0$ Отв.: 0.

$\sqrt{x-2}-\sqrt{x-4}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-3}$ Отв.: $\frac{97}{24}$.

$\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+6}$ Отв.: $-\dfrac{23}{24}$.

$\sqrt{5x+1}-\sqrt{6x-2}-\sqrt{x+6}+\sqrt{2x+3}=0$ Отв.: 3; $\dfrac{5}{4}$.

$\sqrt{8x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{7x+4}+\sqrt{2x-2}$ Отв.: 3.

$\sqrt{8-x}-\sqrt{9+5x}-\sqrt{4-5x}+\sqrt{5+x}=0$ Отв.: $-\frac{1}{6};-1$

$\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}=\sqrt{9x+7}-\sqrt{x-2}$. Отв.: 2.

$\left(\sqrt{x+9}\right)^2+2\sqrt{(x+9)(x+11)}+\left(\sqrt{x+11}\right)^2=10$ Отв.: -7,4.

$\sqrt[3]{x}=\sqrt{x-4}$ Отв.: 8.

$$\sqrt{\frac{20+x}{x}}+\sqrt{\frac{20-x}{x}}=\sqrt{6}$$

<u>Указание.</u> ОДЗ данного уравнения $x\in(0;20]$. После возведения в квадрат с учетом ОДЗ ($x>0$) в удвоенном произведении можно воспользоваться тем, что $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x$ и избавиться от знаменателя. Отв.: 12.

$9-\sqrt{81-7x^3}=\dfrac{x^3}{2}$ Отв.: 0; 2.

$\dfrac{3}{2x-\sqrt{x^2+x}}-\dfrac{5}{2x+\sqrt{x^2+x}}=\dfrac{4}{3x^2-x}$ Отв.: -1.

$\dfrac{3}{x-\sqrt{x^2-3}}-\dfrac{3}{x+\sqrt{x^2-3}}=2$ Отв.: ± 2.

Замена неизвестной

Новая неизвестная – радикал от функции исходной переменной

$\sqrt{9x^3+7}+\sqrt[4]{9x^3+7}=6$ Отв.: 1.

$\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}=12$ Отв.: 729.

$\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}=3$ Отв.: 1; $-\frac{27}{8}$.

$\frac{x+5}{x}-\sqrt{\frac{x+5}{x}}=30$ Отв.: $\frac{1}{7}$.

$\sqrt{\frac{3x}{x+2}}-\sqrt{\frac{3(x+2)}{x}}-2=0$ Отв.: -3.

$x\cdot\sqrt{x^2+15}-\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x^2+15}=2$ Отв.: 1.

$\sqrt{x^2+8x}+6=x^2+8x$ Отв.: -9;1.

$(x+5)(x-2)+3\sqrt{x(x+3)}=0$ Отв.: -4;1.

$2\sqrt{7x^2-6x-1}=1+6x-7x^2$ Отв.: $-\frac{1}{7}$;1.

$\sqrt{4x-x^2-3}=2x^2-8x+9$ Отв.: 2.

$\sqrt{12x-4x^2-8}=8x^2-24x+19$ Отв.: $\frac{3}{2}$.

$\sqrt{6x-x^2-8}=x^2-6x+10$ Отв.: 3.

$5x^2+35x+2\sqrt{x^2+7x+1}=46$ Отв.: -8;1.

$8\sqrt{12+16x-16x^2}+4x-4x^2=33$ Отв.: $\frac{1}{2}$.

$x^3+x+\sqrt[3]{x^3+x-2}=12$ Отв.: 2.

$$\sqrt{\frac{x^2+6x}{x-1}}+\sqrt{x+7}=\frac{7}{\sqrt{x-1}}$$

<u>Указание.</u> Учитывая ОДЗ уравнения $x>1$, привести к общему знаменателю и ввести новую переменную $\sqrt{x^2+6x-7}=y\geq 0$. Отв.: 2.

$$\sqrt{\frac{x^2+8x}{x+1}}+\sqrt{x+7}=\frac{7}{\sqrt{x+1}}$$ Отв.: 1.

$$x+4+\sqrt{\frac{x+4}{x-4}}=\frac{12}{x-4}$$ Отв.: ± 5.

Новая неизвестная – комбинация радикалов от функций исходной переменной

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+5}+2\sqrt{x^2+5x}=25-2x$$ Отв.: 4.

$$\sqrt{x+6}+\sqrt{x-1}+2\sqrt{x^2+5x-6}=51-2x$$ Отв.: 10.

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{x^2+2x-3}=4-2x$$ Отв.: 1.

$$x+\sqrt{x^2+4x-12}=2+\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}$$ Отв.: 3.

$$\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6$$ Отв.: 5.

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$$ Отв.: 3.

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}=35-2x$$ Отв.: $\frac{841}{144}$.

$$\sqrt{3x+4}-\sqrt{x+2}=4x-2\sqrt{3x^2+10x+8}+4$$ Отв.: 7.

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}\right)=x+\sqrt{x^2-9}-6$$ Отв.: $\frac{73}{16}$.

$$x^2+2x\sqrt{x}+2x+\sqrt{x}=30$$ Отв.: $\frac{11-\sqrt{21}}{2}$.

$$4\sqrt{x^2-3x}+2\sqrt{x-3}-\sqrt{x}=5x-24$$

Указание. Обозначить $2\sqrt{x-3}-\sqrt{x}=y$. Отв.: $\frac{196}{9}$.

Однородные иррациональные уравнения

$$\frac{x^2}{\sqrt{2x+15}}+\sqrt{2x+15}=2x$$ Отв.: 5.

$\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}}+\sqrt{3x-2}=2x$ Отв.: 1; 2.

$6x^2+7x\sqrt{1+x}=24(1+x)$ Отв.: $3;-\frac{8}{9}$.

$x^2+x\sqrt{x+1}-2(x+1)=0$ Отв.: $2-2\sqrt{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$4x^2+12x\sqrt{x+1}=27(x+1)$ Отв.: $\frac{81-9\sqrt{97}}{8};3$.

$10x^2-2x-1-3x\sqrt{2x+1}=0$ Отв.: $\frac{1+\sqrt{5}}{4};\frac{1-\sqrt{26}}{25}$.

$\sqrt{x+6}-\sqrt{x-9}=\frac{3}{2}\sqrt[4]{x^2-3x-54}$ Отв.: 10.

$2\sqrt{5x+1}-2\sqrt{2x-5}=3\sqrt[4]{10x^2-23x-5}$ Отв.: 3.

$\sqrt{3x+6}-\sqrt{x-9}=\frac{5}{6}\sqrt[4]{3x^2-21x-54}$ Отв.: 25.

$\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}=2\sqrt[n]{x^2-1}$ Отв.: $\varnothing$.

$6\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}=5\sqrt[6]{(x-3)(x-2)}$ Отв.: $\frac{190}{63};\frac{2185}{728}$.

$3\cdot\sqrt[3]{(4+x)^2}-\sqrt[3]{(4-x)^2}-2\sqrt[3]{16-x^2}=0$ Отв.: $0;-\frac{56}{13}$.

$x^2-16(x+1)\sqrt{x}+66x+1=0$ Отв.: $31\pm 8\sqrt{15}$.

$x^2+12(x-2)\sqrt{x}+32x+4=0$ Отв.: $20-6\sqrt{11}$.

Новая неизвестная – исходная переменная в дробной степени

$x^3\cdot\sqrt[6]{x^5}+x^2\cdot\sqrt[12]{x}=20\sqrt[3]{x}$ Отв.: $0;\sqrt[7]{256}$.

$x\sqrt[4]{x}+2\sqrt[8]{x^5}=3$ Отв.: 1.

$x^{\frac{20}{21}}+x^{\frac{5}{42}}=12x^{-\frac{5}{7}}$ Отв.: $3^{\frac{6}{5}}$.

$\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$ Отв.: 8.

$5\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x}}+3\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x}}=8$ Отв.: -1;1.

$\frac{x\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[5]{x^3}-1}+\frac{\sqrt[5]{x^3}-1}{\sqrt[5]{x}-1}=16$ Отв.: 32.

$5\cdot\sqrt[15]{x^{22}}+\sqrt[15]{x^{14}\sqrt{x}}-22\sqrt[15]{x^7}=0$ Отв.: 0;4.

$x^{\frac{4}{5}}-7x^{-\frac{2}{5}}+6x^{-1}=0$ Отв.: $1; 2\sqrt[3]{4}; -3\sqrt[3]{9}$.

$8{,}4\cdot\sqrt[12]{x^{-7}}-0{,}2\cdot\sqrt[4]{x^{-1}\cdot\sqrt[3]{x^2}}=\sqrt[12]{x^{11}}$ Отв.: 4.

Введение двух неизвестных

$\sqrt[4]{18+5x}+\sqrt[4]{64-5x}=4$ Отв.: $\frac{63}{5};-\frac{17}{5}$.

$\sqrt[4]{47-2x}+\sqrt[4]{35+2x}=4$ Отв.: -17;23.

$\sqrt[4]{13+3x}+\sqrt[4]{69-3x}=4$ Отв.: -4; $\frac{68}{3}$.

$\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2$ Отв.: 8.

$\sqrt[5]{\frac{1}{64}+x}+\sqrt[5]{\frac{1}{64}-x}-\frac{1}{2}=0$ Отв.: $\pm\frac{1}{64}$.

$\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0$ Отв.: 2.

$\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$ Отв.: 1;2;10.

$\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$ Отв.: 3.

$\sqrt[3]{x-4}=1-\sqrt{x+1}$ Отв.: 3.

$\frac{(34-x)\sqrt[3]{x+1}-(x+1)\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}}=30$ Отв.: 7;26.

$\sqrt[3]{x-2}\cdot\sqrt[3]{x-9}=\sqrt{x^2-11x+10}+2$

<u>Указание.</u> Пусть $\sqrt[3]{x-2}=u$, $\sqrt[3]{x-9}=v$, т.е., $x-2=u^3$, $x-9=v^3$. Кроме того, $x^2-11x+10=(x-2)(x-9)-8=u^3v^3-8$ (*). Тогда исходное уравнение в новых переменных примет вид $uv=\sqrt{u^3v^3-8}+2$, откуда $uv=2$. Таким образом, из (*) имеем $x^2-11x+10=2^3-8$. Отв.: $1;\ 10$.

Тригонометрические замены переменных

$\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$

<u>Указание.</u> Учитывая ОДЗ, можно сделать замену $x = \cos t$, $t \in [0;\pi]$ и свести получающееся тригонометрическое уравнение к виду $\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\frac{t}{2} = 0$.

Отв.: $\cos\frac{3\pi}{10}$.

$\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - 4x\sqrt{1-4x^2}\right)} = 1 - 8x^2$

<u>Указание.</u> Сделать тригонометрическую замену $x = \frac{1}{2}\cos t$, $t \in [0;\pi]$, тогда уравнение запишется в виде $\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\sin t - \cos t\right| = -\cos 2t$. Из условия $-\cos 2t \ge 0$ следует, что $\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{3\pi}{4}$. Корни уравнения, принадлежащие этому промежутку, дает после снятия модуля только уравнение $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t - \cos t) = (\sin t - \cos t)(\sin t + \cos t)$. Из равенства нулю первого сомножителя $\sin t - \cos t = 0$ получим решение $t_1 = \frac{\pi}{4}$, откуда $x_1 = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Приравнивая второй сомножитель к нулю, получим уравнение $\sin t + \cos t = \frac{1}{\sqrt{2}}$, один корень которого $t_2 = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ принадлежит промежутку $t \in [0;\pi]$. Тогда второй корень исходного уравнения будет равен $x_2 = \frac{1}{2}\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$.

Второй способ решения основывается на следующем разложении левой и правой частей уравнения $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(2x - \sqrt{1-4x^2}\right)^2} = \left(\sqrt{1-4x^2} - 2x\right)\left(\sqrt{1-4x^2} + 2x\right)$.

Отв.: $\dfrac{1}{2\sqrt{2}};\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$.

$\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1+2x\sqrt{1-x^2}\right)}=1-2x^2$ Отв.: $-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

$\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|=\sqrt{2}\left(2x^2-1\right)$ Отв.: $-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

$\left|2x-\sqrt{1-4x^2}\right|=\sqrt{2}\left(8x^2-1\right)$ Отв.: $\dfrac{1}{2\sqrt{2}};\ -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$.

$\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x$ Отв.: $\cos\dfrac{\pi}{8};\cos\dfrac{5\pi}{8};\cos\dfrac{3\pi}{4}$.

$\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{5}{2\sqrt{x^2+1}}$

Указание. После замены $x=tgt$ уравнение примет вид $\dfrac{1}{|\cos t|}-tgt=\dfrac{5}{2}|\cos t|$.

Когда $\cos t>0$ уравнение после преобразований дает корень $\sin t=-\dfrac{3}{5}$. Тогда $\cos t=\dfrac{4}{5}, x=-\dfrac{3}{4}$. Тот же ответ получается и в случае $\cos t<0$. Отв.: $-\dfrac{3}{4}$.

$\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}+x^2-x=0$ Отв.: $1;\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\arcsin\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)$.

$\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}+x^2+x=0$ Отв.: $-1;-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\arcsin\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)$.

$4\left(3x\sqrt{1-x^2}+4x^2-2\right)=5\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)$

Указание. Заменой $x=\cos t$ уравнение сводится к тригонометрическому виду $4(3\sin t\cos t+2\cos 2t)=5\sqrt{2}\left(\sin\dfrac{t}{2}+\cos\dfrac{t}{2}\right)$ или после преобразований с использованием формулы вспомогательного аргумента

$\sin\left(2t+arctg\,\dfrac{4}{3}\right)-\sin\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$. Отв.: $\cos\left(\dfrac{3\pi}{10}-\dfrac{2}{5}arctg\,\dfrac{4}{3}\right)$; $\cos\left(\dfrac{11\pi}{10}-\dfrac{2}{5}arctg\,\dfrac{4}{3}\right)$.

$\sqrt{2x+3}(16x+6)+9=0$

Указание. Применить замену $x=-\frac{3}{2}\sin^2 t$. Тогда уравнение сведется к виду

$\sqrt{3}\cos t\cdot\left(6-24\sin^2 t\right)+9=0$ или $\cos 3t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Отв.: $-\frac{3}{2}\sin^2\frac{5\pi}{18}$; $-\frac{3}{2}\sin^2\frac{7\pi}{18}$.

Усложненные замены переменных

$\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{8-4x^2}}=2$ Отв.: $1;-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

$\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{5-4x^2}}=3$ Отв.: $1;\frac{1}{2};-\frac{5+\sqrt{65}}{12}$.

(ДонНТУ,2006, 1.5.13ж, 14.10.06) $\sqrt{x+7}-\sqrt{9-x}=\sqrt{-x^2+2x+63}$

Указание. После исследования ОДЗ и согласования знаков левой и правой части ($1\le x\le 9$) возвести обе части уравнения в квадрат и ввести переменную $\sqrt{-x^2+2x+63}=y\ge 0$. Второй способ: ввести переменные $\sqrt{x+7}=u\ge 0$, $\sqrt{9-x}=v\ge 0$ и составить систему уравнений для их определения.

Отв.: $1+\sqrt{46-2\sqrt{17}}$.

$\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}=\sqrt{2x-x^2+16}$ Отв.: $1+\sqrt{7+4\sqrt{2}}$.

$(x-1)(x+3)-(x-1)\cdot\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}-20=0$ Отв.: $-1-\sqrt{20};-1+\sqrt{29}$.

$(x-2)(x+3)-2(x-2)\cdot\sqrt{\frac{x+3}{x-2}}-48=0$ Отв.: $-7;\frac{-1+\sqrt{281}}{2}$.

$x\cdot\sqrt{x}+x(x-1)=2(x-1)^3$ Отв.: $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

$\sqrt[4]{13x+1}+\sqrt[4]{4x-1}=3\sqrt[4]{x}$ Отв.: $\frac{1}{3}$.

$6\sqrt{\sqrt{9+x^2}+x}-\sqrt{\sqrt{9+x^2}-x}=3\sqrt{9+x^2}+3x$

Указание. Ввести переменную $\sqrt{\sqrt{9+x^2}+x}=u\geq 0$, тогда $\sqrt{\sqrt{9+x^2}-x}=\dfrac{3}{u}$ и уравнение примет вид $6u-\dfrac{3}{u}=3u^2$. Отв.: -4; $\dfrac{3\sqrt{5}-11}{2(3+\sqrt{5})}$.

$4\sqrt{\sqrt{4+x^2}+x}-\sqrt{\sqrt{4+x^2}-x}=2\sqrt{4+x^2}+2x$ Отв.: $-\dfrac{3}{2}$; $\dfrac{3\sqrt{5}-1}{2(3+\sqrt{5})}$.

$x^2-4x\sqrt{x+1}+8x-8\sqrt{x+1}+8=0$

Указание. В терминах переменной $t=\sqrt{x+1}$ уравнение перепишется в виде $(t-1)^4=0$. Отв.: 0.

$x^4+4x^3+6x^2+4x+\sqrt{x^2+2x+10}=2$

Указание. Выделить из первых слагаемых двучлен в четвертой степени $(x+1)^4+\sqrt{(x+1)^2+9}=3$. В терминах переменной $t=(x+1)^2$ уравнение перепишется в виде $t^2+\sqrt{t+9}=3$, т.е. $\sqrt{t+9}=3-t^2$. Левая часть этого уравнения не менее 3, а правая – не более 3. Отв.: -1.

Умножение обеих частей уравнения на функцию

$\sqrt{5x^2-4x+8}+\sqrt{5x^2+3x+8}=7$ Отв.: $1;-\dfrac{17}{19}$.

$\sqrt{2x^2+2x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}=x$ Отв.: $0;1;-\dfrac{5}{7}$.

$\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x$ Отв.: 4.

$\sqrt{x^2+5x+3}-\sqrt{x^2+3x+2}=2x+1$ Отв.: $-\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{2}$.

$\sqrt{x^2-5x+2}-\sqrt{x^2+x+1}=1-6x$ Отв.: $\dfrac{1-\sqrt{33}}{16};\dfrac{1}{6}$.

$\sqrt{9x^2-12x+11}-\sqrt{5x^2-8x+10}=2x-1$ Отв.: $\dfrac{1}{2}$.

$\sqrt{x^2+5x+2}+\sqrt{x^2+x+3}=7$ Отв.: $2;-\dfrac{239}{45}$.

$$\frac{\sqrt{3+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{3+x}-\sqrt{1-x}}=\frac{2}{1+x}$$ Отв.: -3;1.

$$\frac{\sqrt{5+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{5+x}-\sqrt{2-x}}=\frac{7}{2x+3}$$ Отв.: -5;2.

$$\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3$$ Отв.: -6;1.

$$\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(10-x)^2}-\sqrt[3]{(x-1)(10-x)}=3$$ Отв.: 2;9.

$$\sqrt[3]{(x+4)^2}+\sqrt[3]{(x-5)^2}+\sqrt[3]{(x+4)(x-5)}=3$$ Отв.: -3;4.

$$\sqrt{x^3-4x^2+x+15}+\sqrt{x^3-4x^2-x+13}=x+1$$ Отв.: 3; $\frac{5+\sqrt{297}}{8}$.

Разложение на сомножители

$$(1+x)\sqrt{3-x^2}=1-x^2$$ Отв.: $-1;\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

$$(x-1)\sqrt{7-x^2}=x^2-7$$ Отв.: $\pm\sqrt{7};\frac{1-\sqrt{13}}{2}$.

$$x\sqrt{5-x^2+2x}=2x-x^2$$ Отв.: $0;\frac{3-\sqrt{11}}{2}$.

$$\left(\sqrt{6-x^2}+x\right)^2=(1-x)^2$$ Отв.: $\frac{2-\sqrt{29}}{5}$.

$$\left(x-\sqrt{4-x^2}\right)^2=(1-x)^2$$ Отв.: $\frac{2+\sqrt{19}}{5};\pm\sqrt{3}$.

$$\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{7-6x-x^2}=1-x$$ Отв.: -3;1.

$$\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2$$ Отв.: -1;1.

$$\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{2x^2+x-1}=\sqrt{x^2-1}$$ Отв.: -1;5.

$$\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x^2-4x+3}=\sqrt{x^2-1}.$$ Отв.: 1.

$$\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-3x+2}=\sqrt{x^2-x}$$ Отв.: 1; $\frac{5-2\sqrt{7}}{3}$.

$\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^2+2x-8}=\sqrt{x^2-6x+8}$ Отв.: $2; \frac{-2-4\sqrt{13}}{3}$.

$\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-6x+8}=\sqrt{x^2-11x+18}$ Отв.: 0;2.

$\left(\sqrt{5x+16}+4\right)\left(\sqrt{5x+16}+4x^2+16x-7\right)=5x$

Указание. Представить уравнение в виде

$$\left(\sqrt{5x+16}+4\right)\left(\left(\sqrt{5x+16}-4\right)+4x^2+16x-3\right)=5x$$

и раскрыть скобки. Отв.: $\frac{\sqrt{19}-4}{2}$.

$\left(\sqrt{6x+9}+3\right)\left(\sqrt{6x+9}+6x^2+9x-23\right)=6x$ Отв.: $\frac{\sqrt{561}-9}{12}$.

Уравнения, содержащие кубические радикалы

$\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[3]{6+x}=3$ Отв.: -5; 2.

$\sqrt[3]{x+59}-\sqrt[3]{x-4}=3$ Отв.: -60; 5.

$\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$ Отв.: 0.

$\sqrt[3]{5x+2}-\sqrt[3]{5x-2}=2$ Отв.: $\pm\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

$\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}$ Отв.: -6; $-\frac{11}{2};-5$.

$\sqrt[3]{2+11x}+\sqrt[3]{2-11x}=4$ Отв.: $\varnothing$.

$\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{2x-3}=0$ Отв.: $1;\frac{3}{2};2$.

$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}$ Отв.: $8;8\pm\frac{12}{7}\sqrt{21}$.

$\sqrt[3]{x^2-7x+10}+\sqrt[3]{x^2-9x-36}=\sqrt[3]{2x^2-16x-26}$ Отв.: -3;2;5;12; $4\pm\sqrt{29}$.

(ДонНТУ,2006, 1.5.33в, 28.10.06) $\sqrt[3]{\frac{2+x}{x}}-\sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}}=1$

Указание. Заменить $\frac{2}{x}=y$ и возвести в куб. Отв.: $\frac{2}{7}$; -1.

Сведение иррациональных уравнений к модульным

$\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-4x+4}=3$ Отв.: $x\in[2;\infty)$.

$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}=2$ Отв.: $x\in[-1;1]$.

$\sqrt{4x^2-8x+4}=3(x^2-3x+2)$ Отв.: $1;\frac{8}{3}$.

$x+\sqrt{9-36x+36x^2}=2(x^2-5x+6)$ Отв.: $1;\frac{15}{2}$.

$\sqrt{x+6+2\sqrt{x+5}}+\sqrt{x+6-2\sqrt{x+5}}=6$ Отв.: 4.

$\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}}+\sqrt{11+x-6\sqrt{x+2}}=1$ Отв.: $x\in[2;7]$.

$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$ Отв.: $x\in[5;10]$.

$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$ Отв.: 15.

$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1$ Отв.: 5.

$\dfrac{\sqrt{x-1-\sqrt{2x-3}}+\sqrt{x+3-3\sqrt{2x-3}}}{\sqrt{x+11+5\sqrt{2x-3}}}=\dfrac{1}{4}$ Отв.: 6.

$\sqrt{(x+9)^2}+2\sqrt{(x+9)(x+11)}+\sqrt{(x+11)^2}=10$ Отв.: -12,6; -7,4.

$\dfrac{\sqrt[7]{12+x}}{x}+\dfrac{\sqrt[7]{12+x}}{12}=\dfrac{64}{3}\sqrt[7]{x}$ Отв.: $-\frac{12}{129};\frac{12}{127}$.

$\dfrac{\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}}{2}-\dfrac{\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}}{x^2}=\dfrac{x}{2}\cdot\sqrt[7]{\dfrac{x^3}{x+\sqrt{2}}}$ Отв.: -1;1.

Иррациональные уравнения, содержащие знак модуля

$|3\sqrt{x}+2-x|+|x-3\sqrt{x}+3|=9$ Отв.: 16.

$|2\sqrt{x}+1-x|+|x-2\sqrt{x}+2|=7$ Отв.: 9.

$3\sqrt{x+4}=5-2|x+2|$ Отв.: $-\frac{15}{4};-3;-\frac{7}{4}$.

$\sqrt{5x-34}=|x-3|-4$ Отв.: $\frac{19+\sqrt{29}}{2}$.

$5\sqrt{1+\left|x^2-1\right|}=3+\left|5x+3\right|$ Отв.: $x\in(-\infty;-1]\cup\left\{\frac{1}{5}\right\}$.

$\sqrt{25+\left|16x^2-25\right|}=4+4\left|x+1\right|$ Отв.: $x\in\left(-\infty;-\frac{5}{4}\right]\cup\left\{-\frac{1}{4}\right\}$.

Учет структуры уравнения

$\sqrt{x+4}+\sqrt{x-2}=0$ Отв.: $\varnothing$.

$\sqrt{x-2}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{x}+1$ Отв.: $\varnothing$.

$\sqrt{2+x-x^2}=\sqrt{x}-2$ Отв.: $\varnothing$.

$\frac{1}{\sqrt{x}}-6\sqrt{x}=\sqrt{12x-2}$ Отв.: $\frac{1}{6}$.

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x}$$

Указание. ОДЗ: $x\in[-1;0)\cup[1;\infty)$. Условие существования второго радикала имеет вид $\frac{x-1}{x}\geq 0$, следовательно, левая часть уравнения в ОДЗ неотрицательна. Условие неотрицательности левой части $\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\geq 0$ приводит к неравенству $x\in[1;\infty)$, сужающему ОДЗ и позволяет применить формулу $\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}=\sqrt{\frac{x-1}{x}}\cdot\sqrt{x+1}$. Тогда уравнение примет вид $\sqrt{\frac{x-1}{x}}\cdot\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{\frac{x-1}{x}}-1\right)=0$. Равенство нулю второго сомножителя после избавления от знаменателя и возведения в квадрат обеих частей уравнения $\sqrt{x^2+x}=\sqrt{x-1}+\sqrt{x}$ приводит к соотношению $\left(\sqrt{x^2-x}-1\right)^2=0$.

Отв.: 1; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Использование монотонности функций

$\sqrt{x-30}+\sqrt{2x+4}=8$ Отв.: 30.

$\sqrt{7+3x}+\sqrt[5]{71x+30}=7$ Отв.: 3.

$\sqrt{37x+12}-\sqrt{31-6x}=2$ Отв.: 1.

$\sqrt{5x+1}+\sqrt{17x+13}=12$ Отв.: 3.

$\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[5]{14x+4}=4$ Отв.: 2.

$\sqrt{x}-\sqrt{5-x}=1$ Отв.: 4.

$2x^3+5x-4=\sqrt{10-x}$ Отв.: 1.

$x^5+x^3-\sqrt{1-3x}+4=0$ Отв.: -1.

$2\sqrt{x-8}+\sqrt{2x-24}+3\sqrt{x-11}+4\sqrt{x+13}+\sqrt{x+24}=33$ Отв.: 12.

$5\sqrt{2x-24}+3\sqrt{5x-59}+\sqrt{x-8}+\sqrt{3x-20}+\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+24}=26$

Отв.: 12.

$\sqrt{x-1}+\sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ Отв.: 1.

$\sqrt{27x+9}-\sqrt{19-3x}=2$ Отв.: 1.

$\sqrt{x}-\sqrt{2-x}-\sqrt{5-3x}+\sqrt{3x-1}+\sqrt{2x-1}-\sqrt{3-2x}=0$ Отв.: 1.

$3\sqrt{x^2-9}+4\sqrt{x^2-16}+5\sqrt{x^2-25}=\dfrac{120}{x}$ Отв.: 5.

$\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{4x-1}=1$ Отв.: $\dfrac{1}{2}$.

Метод оценок

$\sqrt{x-1}+\sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ Отв.: 1.

$\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}=1+\sqrt{4-x}$

<u>Указание</u>. На ОДЗ левая часть уравнения больше или равна трем, а правая – меньше трех. Отв.: $x\in\varnothing$.

$\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$ Отв.: 3.

$\sqrt{3-x}+\sqrt{x+5}-x^2=5+2x$ Отв.: –1.

$2\sqrt{x^2+x+1+\frac{1}{x}}=2-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$ Отв.: -1.

$\sqrt{4x-4x^2+3}=\frac{3}{2}-x-\frac{2}{2x-3}$ Отв.: $\frac{1}{2}$.

$\sqrt{5+4x-x^2}=x+\frac{1}{x-1}$ Отв.: 2.

$\sqrt{8x-x^2-7}=x+\frac{7-2x}{x-3}$ Отв.: 4.

$\sqrt{\frac{2x-1}{x^2-x+1}}+\sqrt{\frac{x^2-x+1}{2x-1}}=\sqrt{4x-x^2}$ Отв.: 2.

$\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$

Указание. Записать уравнение в виде

$$\sqrt{3(x+1)^2+4}+\sqrt{5(x+1)^2+9}=5-(x+1)^2$$

и оценить левую и правую части. Отв.: -1.

$\sqrt{2x^2+4x+11}+\sqrt{3x^2-12x+13}+x^2+6x+5=0$

Указание. Записать уравнение в виде

$$\sqrt{2(x+1)^2+9}+\sqrt{3(x-2)^2+1}=4-(x+3)^2$$

и оценить левую и правую части. Отв.: $\varnothing$.

$\sqrt{6x-x^2-5}+\sqrt{6x-x^2-8}=3+\sqrt{4x-x^2-3}$

Указание. Убедиться, что левая часть уравнения не превышает 3, а правая часть не меньше 3. Отв.: 3.

$\sqrt[3]{2x^2+8x+72}+\sqrt[3]{3x^2+12x+12}=\sqrt{12-4x-x^2}$ Отв.: -2.

$x^2+13=5x+4\sqrt{x}$

Указание. Записать уравнение в виде $x^2-6x+9+\left(x-4\sqrt{x}+4\right)=0$. Отв.: $\varnothing$.

$(3x+2)\cdot\sqrt[3]{x+1}=8\sqrt[3]{3}$ Отв.: 2.

$(4x-3)\cdot\sqrt[5]{9x+5}=18$

Указание. Принимаем $4x-3=9$ и $\sqrt[5]{9x+5}=2$, откуда $x=3$ – корень уравнения. Далее оцениваем сомножители левой части уравнения при $x<3$ и $x>3$ и доказываем, что других корней уравнения. Отв.: 3.

$(4x+1)\sqrt{x+1}=\sqrt{5}$

Указание. Умножим обе части уравнения на 2: $(4x+1)\sqrt{4x+4}=2\sqrt{5}$. Составим систему: $\begin{cases} 4x+1=2 \\ \sqrt{4x+4}=\sqrt{5} \end{cases}$, откуда $x=\frac{1}{4}$. При $x>\frac{1}{4}$ левая часть уравнения всегда больше $2\sqrt{5}$, а при $-1\le x<\frac{1}{4}$ – всегда больше $2\sqrt{5}$.

Отв.: $\frac{1}{4}$.

$|x+3|+|x+4|=\sqrt{x^2+13}+\sqrt{x^2-4x+24}$ Отв.: $\frac{2}{3}$.

$\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+2x+4}$

Указание. Записать уравнение в виде

$$\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{3x^2-1+3(x+1)}+\sqrt{x^2-x+1`+3(x+1)}$$

и рассмотреть три случая: $x+1=0$, $x+1>0$ и $x+1<0$. Отв.: -1.

$\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}=3$

Указание. Исходим из неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим $\sqrt{a\cdot b}\le\frac{a+b}{2}$.

Имеем $\sqrt{(1-x)(1+x)}\le\frac{(1-x)+(1+x)}{2}=1$, т.е., $\sqrt[4]{1-x^2}\le 1$.

Далее, $\sqrt{1-x}=\sqrt{(1-x)\cdot 1}\le\frac{1-x+1}{2}=\frac{2-x}{2}$, $\sqrt{1+x}\le\frac{1+x+}{2}=\frac{2+x}{2}$. Таким образом, левая часть уравнения не больше, чем $1+\frac{2-x}{2}+\frac{2+x}{2}=3$.равенство нулю всех трех слагаемых возможно только при $x=0$. Отв.: $x=0$.

$\sqrt{1-x^2}+\sqrt[4]{x^2+x-1}+\sqrt{1-x}-1=0$

<u>Указание.</u> Обозначим $\sqrt{1-x^2}=u$, $\sqrt[4]{x^2+x-1}=v$, $\sqrt{1-x}=w$. Тогда имеем систему двух уравнений с тремя неизвестными $\begin{cases} u+v+w=1 \\ u^2+v^4+w^2=1 \end{cases}$. В силу неравенств $0\le u,v,w\le 1$, справедливость которых следует из структуры ОДЗ, заключаем, что одновременное равенство $u^2+v^4+w^2=u+v+w=1$ возможно только в случае, когда $u^2=u;\ v^4=v;\ w^2=w$. Учитывая, что $u+v+w=1$, имеем три случая: 1) $u=1; v=w=0$; 2) $u=w=0; v=1$; 3) $u=v=0; w=1$. Решение имеет только второй случай. Отв.: 1.

Суперпозиция функций

$x^3+4=5\cdot\sqrt[3]{5x-4}$

<u>Указание.</u> Разделить обе части на 5 и ввести функцию $f(x)=\dfrac{x^3+4}{5}$. Используя то, что уравнение запишется в виде $f(x)=f^{-1}(x)$, придем к условию $\dfrac{x^3+4}{5}=x$. Отв.: 1; $\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$.

$\sqrt[3]{3x+9}=27(x+1)^3-6$

<u>Указание.</u> В терминах переменной $y=3(x+1)$ уравнение перепишется в виде $\sqrt[3]{y+6}=y^3-6$, т.е. в виде $f(y)=f^{-1}(y)$ Отв.: $-\dfrac{1}{3}$.

$\sqrt[3]{2-x}=2-x^3$ Отв.: 1.

$\sqrt[3]{x}+1=2(2x-1)^3$ Отв.: 1.

$4x^3+1=5\cdot\sqrt[3]{\dfrac{5x-1}{4}}$ Отв.: 1; $\dfrac{-1\pm\sqrt{2}}{2}$.

$\sqrt{1+\sqrt{x}}=x-1$ Отв.: $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

$(2x+1)\left(1+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)+3x\left(1+\sqrt{9x^2+3}\right)=0$ Отв.: $-\dfrac{1}{5}$.

$x\left(\sqrt{x^2+2}+1\right)+(x+1)\left(\sqrt{x^2+2x+3}+1\right)=0$ Отв.: $-\dfrac{1}{2}$.

Усложненные иррациональные уравнения

$\sqrt{18+3x}-\sqrt{9-x^2}=\sqrt{3x}$

Указание. Представить уравнение в виде $9-6\sqrt{x(x+6)}+x^2+6x=0$, то есть $\left(3-\sqrt{x^2+6x}\right)^2=0$. Отв.: $3\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$.

$\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}$

Указание. ОДЗ уравнения: $x\geq\dfrac{1}{2}$. При таких x можем применить формулу $\sqrt{A\cdot B}=\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}$. Группируя слагаемые, перепишем уравнение в виде $\left(\sqrt{2x-1}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x+2}\right)=4$. Домножив левую и правую части уравнения на разность $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+2}$, получим $\sqrt{2x-1}-3=\sqrt{x+6}-\sqrt{x+2}$. Налагаем условие $\sqrt{2x-1}-3\geq 0$, т.е. $x\geq 5$ и возводим в квадрат. Второй способ: ввести три переменные: $\sqrt{x+2}=u\geq 0$, $\sqrt{x+6}=v\geq 0$, $\sqrt{2x-1}=w\geq 0$ для облегчения группировки (учитываем, что $v^2-u^2=4$).

Отв.: 7.

$2\sqrt{x+1}=x^2+x-1$ Отв.: $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$(x+1)\cdot\sqrt{x^2+x+1}=x^2+\dfrac{5}{3}x+1$

Указание. Умножить обе части уравнения на 3 и представить его в «однородном» виде $3(x+1)\sqrt{x^2+x+1}=x^2+x+1+2(x+1)^2$. Отв.: $\dfrac{\sqrt{13}-7}{6};0$.

$\sqrt{x^2+x}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\sqrt{x+3}$

Указание. После нахождения ОДЗ и возведения в квадрат привести уравнение к виду $2\sqrt{x^2+x+1+\dfrac{1}{x}}=2-\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)$ и использовать метод оценок. Отв.: -1.

$\sqrt{x-\dfrac{1}{4}}+\sqrt{x-\dfrac{1}{6}}=\sqrt{\dfrac{1}{3}-x}+x-1$

Указание. В ОДЗ левая часть положительна, а правая, которую можно записать в виде $-\left((1-x)-\sqrt{\dfrac{1}{3}-x}\right)$, – отрицательна. Отв.: $\varnothing$.

$(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}+(2x-1)\sqrt{x^2-x+1}+4x=0$ Отв.: 0.

$\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$

Указание. Перебросить радикалы и переписать уравнение в виде $\sqrt{x^2-3x-2}-\sqrt{x^2-x+2}=\sqrt{2x^2+2x+3}-\sqrt{2x^2-1}$. Затем умножить и разделить выражения в левой и правой частях на сопряженные. Отв.: -2.

$\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+2x+4}$ Отв.: -1.

$\sqrt{3x^2-13x+13}-\sqrt{x^2-2x-1}=\sqrt{3x^2-11x+7}-\sqrt{x^2-5x+8}$ Отв.: 3.

$x^3-1=\sqrt{x}\cdot(-3x^2+5x-3)$

Указание. Уравнение можно записать в виде $\left(x+\sqrt{x}-1\right)^3=0$. Отв.: $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

$\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\cdot\sqrt{1-x^2}$ Отв.: $\cos\dfrac{3\pi}{10}$.

$x^2-10=\sqrt{37+12x}$

Указание. После ограничений на x ($x\geq\sqrt{10}$) и возведения в квадрат привести уравнение к виду $x^4-18x^2+81=2x^2+12x+18$. Отв.: $3+\sqrt{2}$.

$x^2-5=\sqrt{12x+27}$

Указание. После ограничений на x ($x\geq\sqrt{5}$) и возведения в квадрат привести уравнение к виду $x^4-8x^2+16=2x^2+12x+18$. Отв.: $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6+3\sqrt{2}}}{2}$.

$x^2+2=\sqrt{-4x-3}$

Указание. Привести уравнение к виду $\left(x^2+3\right)^2=2(x-1)^2$. Отв.: $x\in\varnothing$.

$x^2-4x+32=16\sqrt{x}$

Указание. Привести уравнение к виду $x^2+12x+36=16x+16\sqrt{x}+4$. Отв.: 4.

$x^2+8x+14\sqrt{x+4}=-1$

Указание. Ввести новую переменную $\sqrt{x+4}=t\ge 0$ и записать уравнение относительно нее: $t^4+14t-15=0$. После определения корня $t=1$ и деления на $t-1$ получим $(t-1)\left(t^3+t^2+t+15\right)=0$. Далее учесть, что второй сомножитель при $t\ge 0$ всегда положителен. Для решения уравнения $t^4+14t-15=0$ можно также применить метод монотонности на отрезке $t\ge 0$. Отв.: -3.

$\sqrt{x+5}=x^2-5$

Указание. Решить уравнение относительно $5=a$. Отв.: $\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$; $\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$.

$\sqrt{x+2}=x^2-2$ Отв.: 2; $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

$x^2-3=\sqrt{3-x}$ Отв.: 2; $\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$.

$\dfrac{96x-24}{12x+5}=\sqrt{-144x^2+72x+7}$

Указание. Сделать после выделения полного квадрата в квадратном трехчлене замену $12x-3=4\sin t$. Отв.: $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}-\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{2}}\right)$.

Список использованной литературы

1. Алгебраические уравнения : учебное пособие для абитуриентов и студентов первого курса / Е. К. Белый, Ю. А. Дорофеева; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федеральное бюджетное образовательное учреждение высш. проф. образования Петрозавод. гос. ун-т. – Петрозаводск : Издательство ПетрГУ, 2015. – 240 с. – (Математика не для ЕГЭ).

2. Башмаков М.И., Беккре Б.М., Гольховой В.М. Задачи по математике. Алгебра и анализ / Под ред. Д.К. Фадеева. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 192с.

3. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов / И. Н. Бронштейн, К. А.Семендяев. – Москва: Наука, 1986. – 544 с.

4. Зарубежные математические олимпиады / С.В. Конягин [и др.] – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1987. – 416с.

5. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – Москва : Наука, 1977. – 832 с.

6. Королёва Т. М. Пособие по математике для поступающих в вузы. Часть 1 / Т. М. Королёва, Е. Г. Маркарян, Ю. М. Нейман – Москва : Изд-во МИИГА и К, 2008. – 144 с.

7. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – Москва : Наука, 1975. – 432 с.

8. Литвиненко В. Н. Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия / В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. – Москва: Просвещение, 1991. – 352 с.

9. Полный сборник решений задач для поступающих в вузы. Группа В / под ред. М. И. Сканави. – Москва : Мир и образование, 2003. – 608 с.

10. Система тренировочных задач и упражнений по математике / А.Я. Симонов [и др.] – Москва : Просвещение, 1991. – 540 с.

11. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. I / В. И. Смирнов. – Москва : Наука, 1974. – 480 с.

12. Улитин Г.М., Мироненко Л.П. Математика. Методическое пособие для абитуриентов. – Донецк: РВА ДонНТУ, 2004. – 330с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное пособие

Вовк Леонид Петрович

Алгебраические и иррациональные уравнения. Теория, методы, алгоритмы решения

Учебное пособие
для обучающихся общеобразовательных организаций и
учреждений дополнительного образования

Редактор - Зубков В.А.
Оформление обложки - Сыромятникова С.Н.
Компьютерная верстка - Сыромятникова С.Н.