

МАТЕМАТИКА_ПЕРВЫЙ_ТУР_2020

1. (9 класс). Даны 10 целых положительных чисел, среди которых нет равных. Известно, что их среднее арифметическое равно 15. Чему равно наибольшее число в этом наборе?

Решение.

Сумма данных чисел равна 150. Так как все числа различны, то сумма девяти наименьших из них не меньше, чем $1+2+\dots+9=45$. Следовательно, наибольшее число не может быть больше чем 105. Пример: $(1+2+\dots+9+105):10=15$.

Ответ: 105.

2 (10 класс). На плоскости расположено N точек. Отметим середины всевозможных отрезков с концами в этих точках. Какое наименьшее число отмеченных точек может получиться?

Рассмотрим бесконечную плоскость и расположим на ней M точек. Соединим все точки между собой и нанесем на плоскость середины получающихся отрезков. Укажите минимальное количество этих середин.

Решение

Рассмотрим всевозможные расстояния между заданными M точками и выберем среди этих расстояний наибольшее – пусть это расстояние между какими-то двумя точками A и B . Соединим точку A с остальными $M-1$ точками; получим $M-1$ отрезков. Середины этих отрезков различны и все лежат внутри или на границе круга с центром в точке A радиуса $|AB|/2$. Аналогично, соединив точку B с оставшимися $M-1$ точками, получим $M-1$ отмеченных точек (середин), расположенных внутри или на границе круга того же радиуса с центром в точке B .

Построенные два круга имеют только одну общую точку – середину отрезка AB . Следовательно, всегда имеется по крайней мере $2 \cdot (M-1) - 1$ (так как середину отрезками мы учитываем дважды) отмеченных середин, то есть не менее $(2M-3)$ отмеченных точек.

Покажем, что $2M-3$ – это наименьшее число отмеченных точек. Пусть заданные M точек лежат на одной прямой, причём расстояния между

соседними точками одинаковы. Легко видеть, что в этом случае число отмеченных точек – середин равно $(M-2)+M-1=2M-3$. Тем самым всё доказано.

3 (10 класс). Решить уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - 6\sqrt{x} = \sqrt{12x - 2}$$

Ответ: $x=1/6$.

4 (11 класс). Перед двумя игроками находится большое количество сваренных вкрутую яиц. Раунд игры заключается в выборе каждым игроком по яйцу и ударе их друг о друга. Побежденным считается тот игрок, у которого яйцо разбилось, и он для следующего удара использует следующее целое яйцо. Победитель своё яйцо оставляет. Считается, что «победившее» яйцо свою прочность не меняет. Первый игрок сохранил своё яйцо в первых N ударах. Найти вероятность того, что он сохранит своё яйцо и в $N+1$ раунде.

Решение. Независимо от того, как складывались события в первых N раундах, в N -м раунде победителем выйдет яйцо, которое самое прочное среди $N+1$ первых случайно извлеченных из корзины яиц (всего в N – м раунде уже извлечено $N+1$ яиц, а именно – в 1-м раунде $1+1=2$ яйца, во 2-м $2+1=3$ яйца и т.д.). Значит, это самое прочное яйцо разобьётся в $N+1$ – м раунде, только если $N+2$ -е извлечённое яйцо окажется прочнее, то есть оно окажется прочнее предыдущих $N+1$ яиц. Вероятность этого равна $1/(N+2)$. Значит, вероятность противоположного события «победитель N раундов победит и в $N+1$ раунде» имеет вероятность

$$1 - (1/(N+2)) = (N+1)/(N+2).$$

Ответ: $(N+1)/(N+2)$.

5 (11 класс). Решить уравнение

$$(x+1)\log_3^2 x + 4x\log_3 x - 16 = 0$$

Ответ: $\frac{1}{81}; 3$.